Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku

Pismeni dio ispita iz Uvoda u teoriju brojeva

7. srpnja 2010.

1. Uprava jednog turističkog odmarališta odlučila je turistima ponuditi smještaj u zajedničke sobe koje imaju 10, 12 i 50 kreveta. Jednog dana u odmaralište je stigla grupa turista koju je recepcioner razmjestio u deseterokrevetne sobe tako da je redom punio sobe s grupama od 10 turista nakon čega je u posljednjoj sobi ostalo 7 slobodnih kreveta. U slučaju istog načina razmještaja u dvanaesterokrevetne sobe, na kraju bi opet u posljednjoj sobi ostalo 7 slobodnih kreveta, a u slučaju razmještaja u sobe s 50 kreveta u posljednjoj bi ostalo 47 slobodnih kreveta. Koliko je bilo turista u grupi koja je pristigla tog dana ako znamo da se u tom odmaralištu primaju grupe od najviše 100 turista?

2. Neka je $p > 3$ prost broj i $p \equiv 3 \pmod{4}$. Dokažite sljedeću tvrdnju. Ako je $q = 2p + 1$ prost broj onda $q \mid M_p$ gdje je $M_p = 2^p - 1$ p-ti Mersennov broj. U tom slučaju $2^{p-1}M_p$ nije savršen.

3. Odredite najmanji primitivni korijen modulo 47. Primjenom indeksa riješite kongruenciju
$$8x^{33} \equiv 21 \pmod{47}.$$

4. Odredite sve pravokutne trokute s cjelobrojnim stranicama čiji opseg iznosi najmanje 56 a površina najviše 210.

5. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$57y^2 - 3x^2 = -3,$$
takva da je $|x| < 10^5$.