

PISMENI ISPIT IZ UVODA U TEORIJU BROJEVA

1. Neka je $(a, b) = 10$. Odredite sve vrijednosti za (a^3, b^4) .
2. U skupu prirodnih brojeva nađite, ako postoji, najmanje rješenje sljedećeg sustava kongruencija

$$x^2 \equiv \left(\frac{13}{31}\right) \pmod{5}, \quad x \equiv 68 \pmod{75}, \quad x \equiv 14 \pmod{24}.$$

3. Neka je p prost broj i a cijeli broj sa svojstvom da je red od a modulo p jednak 6. Dokažite da je $a^2 \equiv a - 1 \pmod{p}$.
4. Dokažite da za svaki prost prirodan broj $p = 6k + 1$ postoje cijeli brojevi a, b takvi da je $a^2 + 3 = bp$.
5. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je $n^2 + (n + 1)^2$ potpun kvadrat. Odredite prvih pet brojeva n s prethodnim svojstvom.