Pismeni ispit iz Uvoda u teoriju brojeva

Napomene

Dopuštena je upotreba kalkulatora i priloženih formula.
Sve svoje tvrdnje obrazložite.

Zadatak 1. Odredite sve proste brojeve p za koje postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $p^{2n+1} = 2^m + 1$.

Zadatak 2. Neka je $m \in \mathbb{Z}$ takav da jednadžba

$$52x + 130y = 100 + m \tag{1}$$

ima cjelobrojnih rješenja.

(a) Odredite najmanji $m \in \mathbb{N}$ s ovim svojstvom. Za tako određeni m nađite sva rješenja jednadžbe (1).

(b) Odredite sve takve $m \in \mathbb{Z}$ koji su također i rješenja sljedećeg sustava kongruencija

$$m \equiv 1 \pmod 7, \quad m \equiv 2 \pmod 4.$$

Zadatak 3. Neka je $p > 3$ prost broj. Odredite ostatak pri dijeljenju broja a brojem p, ako je poznato da je

$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv a(p-1)! \pmod p.$$

Zadatak 4. Neka je p prost broj oblika $6k + 5, k \in \mathbb{N}$. Ispitajte može li diofantska jednadžba

$$2x^2 + 2x + 2 - yp = 0$$

imati rješenja.

Zadatak 5. U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu $z^2 = xy(x + y)$ uz uvjet $(x, y) = 1$.