



---

## Prvi kolokvij iz Uvoda u teoriju brojeva

---

### Napomene

Dopuštena je upotreba kalkulatora i priloženih formula.  
Sve svoje tvrdnje obrazložite.

---

**Zadatak 1.** Neka je  $n$  neparan cijeli broj.

- (a) Dokažite da je  $(3n - 2, 5n - 2) = 1$ .
- (b) Odredite sve  $n$  za koje su  $n$ ,  $n + 4$  i  $4n - 1$  istovremeno prosti.

**Zadatak 2.** Odredite sve prirodne brojeve  $k$  za koje je  $2^k - 1$  potpun kvadrat.

**Zadatak 3.** Neka je  $n$  prirodan broj. Odredite prirodni broj  $m$  sa svojstvom da je  $m = 2p$ ,  $p$  prost broj, i vrijedi

$$\sigma(2^n m) = 2^{n+2}(2^{n+2} - 1).$$

**Zadatak 4.** U RSA kriptosustavu s javnim ključem  $(n, e) = (407, 103)$  odredite  $a = d_K(2)$ , a zatim riješite sustav kongruencija

$$x \equiv a \pmod{9}, \quad x \equiv -1 \pmod{33}.$$

**Zadatak 5.** Neka je  $p$  neparan prost broj i  $n_k = (p - 1)(kp + 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dokažite da

$$p \mid (p - 2)! + n_k 2^{n_k}.$$