



---

## Drugi kolokvij iz Uvoda u teoriju brojeva

---

### Napomene

Dopuštena je upotreba kalkulatora i priloženih formula.  
Sve svoje tvrdnje obrazložite.

---

**Zadatak 1.** (a) Izračunajte  $\left(\frac{-2018}{191}\right), \left(\frac{3}{10^{100}-1}\right)$ .

(b) Neka je  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $p = 2n + 1$  prost broj i vrijedi  $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ . Je li 2 kvadratni ostatak ili kvadratni neostatak modulo  $p$ ?

**Zadatak 2.** Neka je  $p > 3$  prost broj sa svojstvom da postoji prirodan broj  $n$  takav da vrijedi  $p \mid n^2 + 27$ . Odredite ostatak pri dijeljenju broja  $p$  s brojem 6.

**Zadatak 3.** Neka je  $\alpha_n = n + i, \beta_n = 2 - ni$ .

(a) Dokažite da su za sve  $n \in \mathbb{Z}$  Gaussovi cijeli brojevi  $\alpha_n$  i  $\beta_n$  relativno prosti.

(b) Ispitajte jesu li  $\alpha_3$  i  $\beta_3$  prosti ili složeni Gaussovi cijeli brojevi. Ako je neki od njih složen, faktorizirajte ga na dva načina.

**Zadatak 4.** Odredite sve primitivne Pitagorine trojke u kojima je točno jedna stranica manja od 9.

**Zadatak 5.** U skupu prirodnih brojeva, ako je moguće, nađite po dva rješenja jednadžbi

$$55x^2 - y^2 = \pm 1.$$