

PISMENI ISPIT IZ UVODA U TEORIJU BROJEVA

1. (a) Kojeg je oblika prirodni broj n ako je poznato da $6|n+1$ i $8|n+5$?
(b) Dokažite da se svaki neparan prost broj može zapisati kao razlika dva kvadrata.
2. Odredite sve prirodne brojeve n za koje vrijedi $\varphi(7n) = 6\varphi(n)$. Ako je m prirodan broj sa svojstvom $\varphi(7m) \neq 6\varphi(m)$ i $\tau(m) = 3$, odredite $\sigma(m)$.
3. Neka je p neparan prost broj. Nađite sva rješenja kongruencije

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Koliko rješenja modulo p ima ova kongruencija?

4. U ovisnosti o neparnom prirodnom broju n izračunajte vrijednost Jacobijevog simbola

$$\left(\frac{n^5}{n+2} \right).$$

5. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva m sa svojstvom da je broj

$$2 + 2\sqrt{33m^2 + 1}$$

prirodan broj i odredite barem tri takva prirodna broja.

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.