UVOD U TEORIJU BROJEVA - ZADACI ZA VJEŽBU

DJELJIVOST

Zadatak 1 *Neka su* $n, m \in \mathbb{N}$*. Ako* $10 | 3^n + m$*, dokažite da* $10 | 3^{n+4} + m$*.*

Zadatak 2 *Odredite sve* $n \in \mathbb{Z}$ *takve da* $(n+2) | n^2 + 3$*.*

Zadatak 3 *Ako su sve znamenke troznamenkastog broja međusobno jednake, dokažite da je taj broj djeljiv s 37.*

Zadatak 4 *Ako je* n *neparan broj, dokažite da* $8 | n^2 - 1$*.*

Zadatak 5 *(a) Dokažite da je razlika kvadrata dvaju neparnih cijelih brojeva djeljiva sa 8.*

(b) Ako je brojnik razlomka razlika kvadrata dvaju neparnih cijelih brojeva, a nazivnik zbroj kvadrata nekih drugih neparnih brojeva, dokažite da je taj razlomak skrativ s 2, ali ne i s 4.

Zadatak 6 *Dokažite da* $3 | m(2m^2 + 7), \forall m \in \mathbb{Z}$*.*

Zadatak 7 *Dokažite da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

(a) $6 | 7^n - 1$,

(b) $3 | n(2n^2 - 11)$.

Zadatak 8 *Dokažite da je zbroj kubova 3 uzastopna cijela broja djeljiv s 9.*

Zadatak 9 *Odredite najmanji prirodni broj* n*,* $n > 2000$*, takav da je izraz*

$$\frac{x_1^4 + \cdots + x_n^4}{5}$$

prirodan broj za svaki $x_i \in \mathbb{Z}$ *takav da* $5 \nmid x_i, i = 1, \ldots, n$*.*

Zadatak 10 *Dokažite da se niti jedan prirodni broj oblika* $8k + 7$ *ne može prikazati kao suma 3 kvadrata.*

Zadatak 11 *Dokažite da je razlika kvadrata 2 cijela broja koja nisu djeljiva ni sa 2 ni sa 3, djeljiva s 24.*

Zadatak 12 *Odredite* $x, y \in \mathbb{Z}$ *za koje vrijedi* $41x - 74y = -1$*.*

Zadatak 13 *Ispitajte ima li jednadžba*

$$616x + 63y = 33$$

rješenja.

Zadatak 14 *Dokažite: Ako* $a | bc$ *i* $(a, b) = 1$*, onda* $a | c$*.*

Zadatak 15 *Dokažite da se razlomak* $\dfrac{5n^2+4}{6n^2+5}$ *ne može skratiti ni za koji cijeli broj* n.

Zadatak 16 *Odredite sve prirodne brojeve koji se mogu javiti kao zajednička mjera brojeva* $5n+6$ *i* $8n+7$.

Zadatak 17 *Dokažite da je umnožak kvadrata cijelog broja i broja koji prethodi tom kvadratu djeljiv s 12.*

Zadatak 18 *Dokažite da je broj* z^3+5z *djeljiv sa 6 za sve cijele brojeve* z.

Zadatak 19 *Za sve* $n \in \mathbb{Z}$ *odredite* $[5n-2, 7n-3]$.

Zadatak 20 *Ako je zbroj kvadrata triju prostih brojeva* a, b, c *prost broj, dokažite da da je barem jedan od brojeva* a, b, c *jednak 3.*

Zadatak 21 *Neka je* p *neparan prost broj. Dokažite da je* p^2+1 *složen broj.*

Zadatak 22 *Za koje* $n \in \mathbb{N}$ *su brojevi* $n, n+10$ *i* $n+14$ *istovremeno prosti?*

Zadatak 23 *Dokažite da je za* $n > 1$ *broj* n^4+n^2+1 *složen broj.*

Zadatak 24 *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, *i neka je* m *produkt prvih* n *prostih brojeva. Dokažite da niti jedan od brojeva* $m-1$ *i* $m+1$ *ne može biti potpun kvadrat.*

Zadatak 25 *Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika* $6k+5$.

Zadatak 26 *Odredite sve prirodne brojeve* n *koji imaju dva prosta djelitelja,* $\tau(n) = 6$ *i* $\sigma(n) = 28$.

Zadatak 27 *Neka je*

$$n = \underbrace{111\ldots1}_{2017}.$$

(1) Dokažite da n *nije potpun kvadrat.*

(2) Koje je parnosti broj djelitelja broja n*?*

Zadatak 28 *Ako je za* $k \in \mathbb{N}$ *broj* 2^k-1 *prost, dokažite da je* $n = 2^{k-1}(2^k-1)$ *savršen broj.*

Zadatak 29 *Dokažite da je* $\sigma(n)$ *za neparan prirodan broj* n *neparan broj ako i samo je* n *potpun kvadrat.*