

KONGRUENCIJE

Zadatak 1 *Riješite kongruencije:*

$$(a) 20x \equiv 16 \pmod{64} \quad (b) 60x \equiv 185 \pmod{455}.$$

Zadatak 2 *Riješite sustave kongruencija:*

$$(a) x \equiv 5 \pmod{6} \quad x \equiv 3 \pmod{10} \quad x \equiv 8 \pmod{15},$$

$$(b) 3x \equiv 1 \pmod{10} \quad 4x \equiv 3 \pmod{5} \quad 2x \equiv 7 \pmod{9},$$

$$(c) x \equiv 5 \pmod{24} \quad x \equiv 25 \pmod{28} \quad x \equiv 8 \pmod{45}.$$

Zadatak 3 *Kineski generali prebrojavali su preživjele vojnike nakon bitke raspoređujući ih u kolone različite duljine i bilježeći koliko je vojnika ostalo kao višak u zadnjoj koloni. Ako je general na početku bitke imao 1200 vojnika, a vojnici raspoređeni u kolone duljine 5, 6, 7, 11 u zadnjem redu imaju, redom, 3, 3, 1, 11 vojnika, koliko je vojnika preživjelo bitku?*

Zadatak 4 *Ako je p prost broj, pokažite da vrijedi*

$$1 + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \cdots + \varphi(p^k) = p^k.$$

Zadatak 5 *Dokažite da jednakost*

$$\sigma(n) + \varphi(n) = n\tau(n)$$

vrijedi ako i samo ako je n prost broj.

Zadatak 6 *Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi*

$$\varphi(4n) = 2\varphi(2n).$$

Zadatak 7 *Dokažite da jednadžba*

$$\varphi(n) = 14$$

nema rješenja u prirodnim brojevima.

Zadatak 8 *Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ takve da je*

$$\varphi(n) = 12.$$

Zadatak 9 *Dokažite:*

$$(a) 39 \mid 53^{103} + 103^{53} \quad (b) 7 \mid 37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 10 *Odredite ostatak pri dijeljenju broja 2^{55} sa 17.*

Zadatak 11 *Odredite ostatak pri dijeljenju broja $3^{100} + 5^{100}$ sa 7.*

Zadatak 12 *Odredite posljednje 3 znamenke broja 2^{100} .*

Zadatak 13 *Ako je $(a, 55) = (b, 55) = 1$, dokažite da $55 \mid a^{40} - b^{40}$.*

Zadatak 14 *Ako je p prost broj, dokažite da vrijedi*

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Zadatak 15 *Koristeći Eulerov teorem riješite kongruenciju*

$$41x \equiv 53 \pmod{62}.$$

Zadatak 16 *Odredite red od 3 modulo 91.*

Zadatak 17 *Riješite linearne diofantske jednadžbe:*

(a) $3x + 4y + 5z = 6$

(b) $3x + 9y - 15z = 6$

(c) $2x + 7y - 4z = 3$

(d) $5x - 10y + 20z = 17$

(e) $14x + 6y - 21z = 3.$

Zadatak 18 *Ispitajte može li diofantska jednadžba*

$$x^2 + y^2 = 8n + 5$$

imati rješenja u prirodnim brojevima.

Zadatak 19 *Primjenom Cezarove šifre s pomakom 15, šifrirajte poruku*

POBJEDNIK.

U zadatku koristite hrvatski alfabet.

Zadatak 20 *Neka je primjenom Cezarove šifre dobiven šifrat*

WXYQZYUCKTK.

U zadatku koristite engleski alfabet.

Zadatak 21 *U RSA kriptosustavu s javnim ključem*

$$K = (307829, 151)$$

(a) *šifrirajte poruku*

ZADATAK,

(b) *dešifrirajte poruku*

1195—45600—162514—162026.