Pellove jednadžbe

Diofantska jednadžba
$$x^2 - dy^2 = 1, \quad d \in \mathbb{N},\ d \neq \square,$$
naziva se *Pellova jednadžba*. Jednadžbe oblika
$$x^2 - dy^2 = N, \quad N \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N},\ d \neq \square,$$
nazivaju se *pellovske jednadžbe*.

Lako se vidi da za $d < 0$ ili $d = \square$ gornje jednadžbe mogu imati najviše konačno mnogo rješenja.

U nastavku ćemo nešto više reći o rješenjima jednadžbi oblika $x^2 - dy^2 = \pm 1$, $d \in \mathbb{N}$, $d \neq \square$.

Rješenje $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jednadžbe zvat ćemo *najmanjim rješenjem* ako je x minimalan.
Uočimo da vrijedi: (x_1, y_1) je najmanje rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ ako i samo ako za bilo koje drugo rješenje $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vrijedi
$$x_1 + y_1\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}. \tag{2.1}$$
Ovo se može vidjeti iz sljedećeg:
$$x_1^2 - dy_1^2 = a^2 - db^2$$
povlači da je $x_1^2 - a^2 = d(y_1^2 - b^2)$ pa je $x_1 < a$ akko $y_1 < b$. Stoga je (2.1) moguće akko je $x_1 < a$.

Pokazat ćemo da se sva rješenja jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ mogu dobiti pomoću najmanjeg rješenja ove jednadžbe.

Uočimo da vrijedi
$$x_1^2 - dy_1^2 = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}).$$
Primjetimo i da
$$a + b\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d})$$
povlači da je
$$a - b\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}).$$

Teorem 2.1. *Ako je (x_1, y_1) najmanje rješenje jednadžbe*

$$x^2 - dy^2 = 1, \tag{2.2}$$

onda su sva rješenja ove jednadžbe dana s (x_n, y_n) pri čemu je $n \in \mathbb{N}$ i

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n. \tag{2.3}$$

Dokaz. Iz (2.3) slijedi

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n,$$

pa je

$$x_n^2 - dy_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (x_1^2 - dy_1^2)^n = 1,$$

tj. (x_n, y_n) je zaista rješenje od (2.2). Osim toga odavde je $x_n - y_n\sqrt{d} > 0$.

Pretpostavimo da je $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rješenje jednadžbe (2.2) koje nije oblika (x_n, y_n) (pri čemu su x_n, y_n zadani s (2.3)). Kako je

$$\begin{aligned} x_1 + y_1\sqrt{d} &> 1 \\ s + t\sqrt{d} &> 1, \end{aligned}$$

postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^m < s + t\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{m+1}.$$

Množenjem prethodne nejednakosti s $(x_1 - y_1\sqrt{d})^m$ dobivamo

$$1 < (s + t\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^m < x_1 + y_1\sqrt{d}. \tag{2.4}$$

Uočimo da za $a + b\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^m$ vrijedi

$$a^2 - db^2 = (s^2 - t^2 d)(x_1^2 - dy_1^2)^m = 1.$$

Stoga je (a, b) također rješenje jednadžbe (2.2). Pokazat ćemo da je to rješenje u prirodnim brojevima sa svojstvom $a < x_1$.

U (2.4) smo zaključili da je

$$a + b\sqrt{d} > 1.$$

Kako je

$$a^2 - db^2 = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = 1,$$

vrijedi i

$$0 < a - b\sqrt{d} < 1.$$

Iz ovih nejednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned} 2a &= (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) > 0 \\ 2b\sqrt{d} &= (a + b\sqrt{d}) - (a - b\sqrt{d}) > 0. \end{aligned}$$

Nejednakost (2.4) sada povlači da je rješenje $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takvo da vrijedi $a < x_1$ pa smo dobili kontradikciju. □

U nastavku će nam biti korisna tvrdnja sljedećeg teorema iz prethodnog poglavlja:

Teorem 1.7. *Neka su p, q cijeli brojevi, $q \geq 1$ i*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Tada je $\frac{p}{q}$ neka konvergenta u razvoju u verižni razlomak od α.

Teorem 2.2. *Sva rješenja u prirodnim brojevima jednadžbi*

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

su oblika $x = p_n$, $y = q_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $\frac{p_n}{q_n}$ konvergenta u razvoju od $\sqrt{d}$ u verižni razlomak.

Dokaz. Neka je $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$. Iz rastava

$$(x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = 1$$

dobivamo (dijeljenjem s $y(x + y\sqrt{d})$)

$$\frac{x - y\sqrt{d}}{y} = \frac{1}{y(x + y\sqrt{d})} > 0. \tag{2.5}$$

Zbog

$$\begin{aligned} x - y\sqrt{d} &> 0 \ / + 2y\sqrt{d} \\ x + y\sqrt{d} &> 2y\sqrt{d} > 2y, \end{aligned}$$

vrijedi

$$\frac{1}{x + y\sqrt{d}} < \frac{1}{2y}.$$

Iz (2.5) sada slijedi

$$0 < \frac{x - y\sqrt{d}}{y} = \frac{x}{y} - \sqrt{d} < \frac{1}{2y^2}.$$

Teorem 1.7. povlači da je $\frac{x}{y}$ neka konvergenta od $\sqrt{d}$.

Neka je sada $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = -1$. Tada je

$$dy^2 - x^2 = 1.$$

Analogno kao ranije dobivamo

$$\begin{aligned}(y\sqrt{d}-x)(y\sqrt{d}+x) &= 1/:(x\sqrt{d}(x+y\sqrt{d}) \\ \frac{y\sqrt{d}-x}{x\sqrt{d}} &= \frac{1}{x\sqrt{d}(x+y\sqrt{d})}>0 \\ y\sqrt{d}-x &> 0/+2x \\ y\sqrt{d}+x &> 2x/\cdot\sqrt{d} \\ \sqrt{d}(y\sqrt{d}+x) &> 2x\sqrt{d}>2x \\ \frac{1}{\sqrt{d}(y\sqrt{d}+x)} &< \frac{1}{2x}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Iz (2.6) sada slijedi

$$0<\frac{y}{x}-\frac{1}{\sqrt{d}}<\frac{1}{2x^2}$$

pa je, prema *Teoremu 1.7.*, $\frac{y}{x}$ konvergenta u razvoju u verižni razlomak od $\frac{1}{\sqrt{d}}$. Kako je $\frac{1}{\sqrt{d}}<1$, zbog $\frac{1}{\sqrt{d}}=0+\frac{1}{\sqrt{d}}$, zaključujemo da su razvoji u verižni razlomak brojeva $\frac{1}{\sqrt{d}}$ i $\sqrt{d}$ u sljedećoj vezi

$$\frac{1}{\sqrt{d}}=[0,a_0,a_1,\ldots],\quad \sqrt{d}=[a_0,a_1,\ldots].$$

Dakle, ako je $\frac{y}{x}$ n-ta konvergenta u razvoju od $\frac{1}{\sqrt{d}}$, onda je $\frac{x}{y}$ $(n-1)$-va konvergenta u razvoju od $\sqrt{d}$. Time je teorem dokazan. □

Tvrdnje u nastavku navodimo bez dokaza (dokazi se mogu naći u [1]).

Teorem 2.3. *Razvoj u verižni razlomak broja $\sqrt{d}$ je oblika*

$$[a_0,\overline{a_1,a_2,\ldots,a_{r-1},2a_0}],$$

gdje je $a_0=\lfloor\sqrt{d}\rfloor$, i $a_1,\ldots,a_{r-1}$ su centralno simetrični tj. $a_1=a_{r-1},a_2=a_{r-2},\ldots$

Teorem 2.4. *Neka je r duljina perioda u razvoju u verižni razlomak broja $\sqrt{d}$.*

(i) Ako je r paran, onda jednadžba $x^2-dy^2=-1$ nema rješenja, a sva rješenja od $x^2-dy^2=1$ su dana s $x=p_{nr-1}$, $y=q_{nr-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

(ii) Ako je r neparan, onda su sva rješenja jednadžbe $x^2-dy^2=-1$ dana s $x=p_{nr-1}$, $y=q_{nr-1}$, $n\in\mathbb{N}$ neparan, a sva rješenja od $x^2-dy^2=1$ su dana s $x=p_{nr-1}$, $y=q_{nr-1}$, $n\in\mathbb{N}$ paran.

Uočimo da jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$ uvijek ima rješenja, dok jednadžba $x^2 - dy^2 = -1$ ima rješenja ako i samo ako je r neparan.

Literatura

[1] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, skripta.