Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

Prvi kolokvij iz Uvoda u teoriju brojeva

5. svibnja 2014.

1. a) [**15 bod.**] Neka su m, n prirodni brojevi i $(m, n) = 1$. Odredite $(m + n, m^2 - mn + n^2)$.

   b) [**5 bod.**] Za prirodan broj n odredite ostatak pri dijeljenju broja $2^{n+2}+3^{2n+1}$ brojem 7.

2. [**20 bod.**] Odredite sve prirodne brojeve a, b takve da je $a^4 + 4b^4$ prost broj.

3. [**20 bod.**] Neka je m prirodan broj. Odredite oblik svih prostih faktora $p > 2$ broja $m^2 + 1$.

4. [**20 bod.**] Neka je $n > 4$ prirodan broj sa svojstvom da su $n - 1$ i $n + 1$ prosti brojevi. Dokažite da je tada $\varphi(n) \leq \frac{n}{3}$.

5. a) [**15 bod.**] Odredite sve $0 < x \leq 1000$ koji su rješenje sustava kongruencija

$$\begin{aligned} 8x &\equiv 5 \pmod{15} \\ 5x &\equiv 11 \pmod{21} \\ 7x &\equiv 55 \pmod{60}. \end{aligned} \tag{1}$$

   b) [**5 bod.**] Neka je $0 < x_m \leq 1000$ najveće dobiveno rješenje sustava kongruencija (1). Pokažite da jednadžba

$$x_m a^2 - 11b^2 = 30c^2 - 145a^2b^2 + 2$$

   nema cjelobrojnih rješenja a, b, c.