# PISMENI ISPIT

13. 2. 2017.

## Pravila

Pismeni ispit se piše 2 sata i ukupno nosi 100 bodova. Sve tvrdnje precizno obrazložite, odnosno raspišite. Ispit se predaje s papirom sa zadacima i radnim listovima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranicama kolegija.

---

1. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi $(n \geq 2)$ takvi da vrijedi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokažite da je

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

2. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu $f(x) + f(3-x) = 3$, gdje je

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}.$$

3. Ispitajte konvergenciju niza $(a_n)$ zadanog rekurzivno s

$$a_1 = \sqrt{\frac{2+a_0^2}{3}}, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2+a_n^2}{3}}, \quad 0 < a_0 < 1.$$

Ukoliko je konvergentan, odredite njegov limes.

4. Izračunajte limese bez primjene L'Hospitalovog pravila:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(x+\frac{a}{n}) + (x+\frac{2a}{n}) + \cdots + (x+\frac{(n-1)a}{n})\right]$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

5. Odredite parametre $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $y(x) = \cos(2\arccos x)$ zadovoljava jednadžbu

$$(1-x^2)y'' + \alpha x^\gamma y' + \beta y = 0.$$

M. Miloloža Pandur