Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

grupa A

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa

1. [**10 bod**] Neka su $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcije. Je li kvocijent f/g parna ili neparna funkcija ako su:

   a) obje funkcije parne

   b) obje funkcije neparne

   c) f neparna i g parna funkcija.

2. [**15 bod**] Odredite skupove D i K tako da funkcija $f : D \to K$ definirana formulom $f(x) = \dfrac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}$ bude bijekcija, a zatim odredite inverznu funkciju.

3. [**15 bod**] Zadani su skupovi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$, na sljedeći način: skup S_1 jednak je skupu svih gomilišta niza $a_n = 5(-1)^n + \lfloor \frac{5}{n} \rfloor$ te skup $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 8| < 10\}$.

   a) [**5 bod**] Pomoću intervala napišite skupove S_1 i S_2.

   b) [**2 bod**] Odredite $S_1 \cup S_2$.

   c) Ako postoje, odredite:

   c1) [**2 bod**] $\inf(S_1 \cup S_2)$ c2) [**2 bod**] $\sup(S_1 \cup S_2)$

   c3) [**2 bod**] $\min(S_1 \cup S_2)$ c4) [**2 bod**] $\max(S_1 \cup S_2)$.

4. [**10 bod**] Tri broja su uzastopni članovi aritmetičkog niza i njihova suma iznosi 12. Ako im redom pribrojimo 2, 5 i 20 dobit ćemo tri broja koja čine geometrijski niz. Odredite te brojeve.

5. [**15 bod**] Dokažite da je niz (a_n) zadan s $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{7}(a_{n-1}^2 + 10)$, $n \geq 2$, omeđen i monoton te mu odredite limes.

6. [**15 bod**] Koristeći teorem o sendviču pokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3n^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{3n^4+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3n^4+n}} \right) = 0.$$

7. Izračunajte sljedeće limese:

   a)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+3^2+...+3^n}{1+5+5^2+...+5^n}$ b)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n^2-9n+1} - \sqrt{3n^2+1}\right)$

   c)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n^2+1}{5n^2+3}\right)^{10n^2+9}$ d)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+5^{n-1}-7}{9\cdot 5^n - 4\cdot 3^{n+1}}$.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

grupa B

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa

1. [**10 bod**] Neka su $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcije. Je li umnožak fg parna ili neparna funkcija ako su:

   a) obje funkcije parne

   b) obje funkcije neparne

   c) f neparna i g parna funkcija.

2. [**15 bod**] Odredite skupove D i K tako da funkcija $f : D \to K$ definirana formulom $f(x) = \dfrac{3^{3x}+1}{3^{3x}-1}$ bude bijekcija, a zatim odredite inverznu funkciju.

3. Zadani su skupovi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$, na sljedeći način: skup S_1 jednak je skupu svih gomilišta niza $a_n = 4(-1)^n + \lfloor \frac{4}{n} \rfloor$ te skup $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : |5x - 7| < 8\}$.

   a) [**5 bod**] Pomoću intervala napišite skupove S_1 i S_2.

   b) [**2 bod**] Odredite $S_1 \cup S_2$.

   c) Ako postoje, odredite:

   c1) [**2 bod**] $\inf(S_1 \cup S_2)$ c2) [**2 bod**] $\sup(S_1 \cup S_2)$
   c3) [**2 bod**] $\min(S_1 \cup S_2)$ c4) [**2 bod**] $\max(S_1 \cup S_2)$.

4. [**10 bod**] Tri broja su uzastopni članovi aritmetičkog niza i njihova suma iznosi 15. Ako im redom pribrojimo 1, 4 i 19 dobit ćemo tri broja koja čine geometrijski niz. Odredite te brojeve.

5. [**15 bod**] Dokažite da je niz (a_n) zadan s $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{9}(a_{n-1}^2 + 14)$, $n \geq 2$, omeđen i monoton te mu odredite limes.

6. [**15 bod**] Koristeći teorem o sendviču pokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{7n^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{7n^4+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{7n^4+n}} \right) = 0.$$

7. Izračunajte sljedeće limese:

   a)[**5 bod**] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+7+7^2+...+7^n}$

   b)[**5 bod**] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+7n-5} - \sqrt{n^2+n+1} \right)$

   c)[**5 bod**] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+1}{3n^2+4} \right)^{6n^2+10}$

   d)[**5 bod**] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 7^{n+1} + 5^n - 9}{3 \cdot 5^{n+1} - 7^n}$.