Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
5. prosinca 2018.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Što znači da je skup vektora $S = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} \subset X_0$ linearno zavisan.*

(b) *Ako je skup S linearno zavisan, dokažite da se barem jedan od vektora skupa S može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.*

(c) *Korištenjem ranga matrice ispitajte linearnu zavisnost vektora: $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - \vec{k}$*

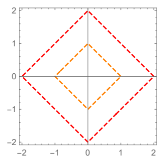
Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c) Linearno su zavisni jer je $r([\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]) = 2$.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Kako se definira norma vektora u vektorskom prostoru X_0? Navedite barem jedan primjer najčešće korištene norme vektora.*

(b) *Nacrtajte skup $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq \|x\|_1 \leq 2\}$.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;*
(b) Vijenac



Zadatak 3. [15 bodova]

(a) *Navedite definiciju i osnovna svojstva skalarnog produkta.*

(b) *Zadani su vektori $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \lambda\vec{j} + 4\vec{k}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Odredite broj $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu okomiti.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $\lambda = -10$;*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Kako se definira i kako se može odrediti projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac određen vektorom $\vec{a} \neq \vec{b}$?*

(b) *Zadan je trokut $\triangle ABC$ s vrhovima $A = (-4, 1, 0)$, $B = (-4, -1, -2)$, $C = (-4, 1, 4)$. Odredite visinu iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ i površinu tog trokuta.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;*
(b) $\vec{v} = \vec{b} - (\vec{b}\vec{u})\vec{u} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$, gdje je $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{u} = \vec{a}/\|\vec{a}\|$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$;
$v = 2\sqrt{2}$; $P = \frac{av}{2} = 4$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Napišite Hölderovu nejednakost.*

(b) *Za proizvoljne vektore* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi nejednakost trokuta* $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$. *Dokažite da vrijedi jednakost onda i samo onda ako postoji* $\lambda \geq 0$ *takav da je* $b = \lambda a$.

Rješenje: (a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Napišite definiciju regularne i singularne matrice. Navedite primjere.*

(b) *Dokažite da vrijedi:* $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(c) *Za poznate matrice* $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *riješite matričnu jednadžu* $A + BX = C$.

Rješnje: (a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c) $X = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 4 & 31 \end{bmatrix}$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
5. prosinca 2018.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Što znači da je skup vektora $S = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ linearno nezavisan?*

(b) *Što je rang matrice i kako se pomoću ranga matrice može ispitati linearna nezavisnost skupa S?*

(c) *Može li se iz skupa vektora: $a_1 = (1, -5, -3)$, $a_2 = (1, -2, -1)$, $a_3 = (-3, 0, -1)$ izdvojiti linearno nezavisan podskup? Ako može, što predstavlja skup svih linearnih kombinacija tog podskupa vektora?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c) Može. Vektorski potprostor.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Napišite formulu za računanje euklidske udaljenosti dviju točaka $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ u prostoru. Navedite barem jedan primjer kako se još može definirati udaljenost dviju točaka?*

(b) *Koristeći euklidsku udaljenost odredite najdulju stranicu trokuta $\triangle ABC$, gdje je $A = (-3, -4, -2)$, $B = (5, 2, -2)$, $C = (-3, -2, -2)$.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;*
(b) Duljine stranica trokuta su: $d(A, B) = 10$, $d(A, C) = 2$, $d(B, C) = 4\sqrt{5} \approx 8.9$.

Zadatak 3. [15 bodova]

(a) *Objasnite geometrijski smisao skalarnog produkta.*

(b) *Pokažite da su vektori $\vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c})$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti.*

Rješnje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali;*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Kako se definira i kako se može odrediti projekcija vektora $\vec{c}$ na ravninu određenu linearno nezavisnim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$?*

(b) *Zadan je tetraedar s vrhovima $A = (1, 2, 2)$, $B = (1, 4, 0)$, $C = (3, 4, 4)$, $D = (-2, 2, 0)$. Odredite udaljenost točke D do ravnine određene vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.*

Rješnje: *(a) Nastavni materijali; (b) Ortonormirana baza generirana vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ je $\vec{u} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$; Za vektor $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ $\vec{d'} = \vec{d} - (\vec{d}\vec{u})\vec{u} - (\vec{d}\vec{v})\vec{v} = \frac{1}{3}(-4, 2, 2)$; $v = \|\vec{d'}\| = \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1.6$.*

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Napišite Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost.*

(b) Za proizvoljne vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Dokažite da vrijedi jednakost onda i samo onda ako su vektori a, b linearno zavisni.

Rješnje: (a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) Kako se definiraju elementarne matrice n-tog reda Q_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda; j)$ i kakvo je njihovo djelovanje na matricu $A \in M_n$? U kakvoj su vezi s elementarnim matricama n-tog reda P_{ij}, $P_i(\lambda)$, $P_i(\lambda; j)$?

(b) Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$. *Izračnajte* $B := Q_3(2; 2) \cdot Q_{23} \cdot Q_1(\frac{1}{2}) \cdot A$

Rješnje: (a) Nastavni materijali; (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.