Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
30. siječnja 2019.

2. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Hoće li se i kako promijeniti vrijednost determinante ako njezinom r-tom retku dodamo s-ti redak prethodno pomnožen brojem $\lambda \in \mathbb{R}$? Navedite primjer.*

(b) *Hoće li se i kako promijeniti vrijednost determinante ako njezin r-ti redak pomnožimo brojem $\lambda \neq 0$? Navedite primjer.*

(c) *Čemu je jednaka determinanta donjetrokutaste, a čemu determinanta gornjetrokutaste matrice? Navedite primjer.*

Rješenje: *Nastavni materijali.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Neka su $A, B \in M_n$. Postoji li veza između $\det AB$, $\det A$ i $\det B$? Priložite primjer.*

(b) *Neka je $A \in M_n$ matrica s elementima a_{ij}. Napišite Laplaceov razvoj $\det A$ po elementima r-tog stupca.*

(c) *Pomoću Gramove determinante ispitajte linearnu zavisnost vektora: $a = [2, -1, 2]^T$, $b = [-2, 0, 2]^T$, $c = [-1, -1, 0]^T$.*

Rješenje: *(a), (b) Nastavni materijali; (c) $G(a, b, c) = 100$. Vektori su linearno nezavisni.*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Iskažite Cramerov teorem za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$.*

(b) *Diskutirajte i riješite sustav linearnih jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & \lambda \end{array}$$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $D = \lambda - 2$, $D_1 = 2 - \lambda$, $D_2 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$. Za $\lambda = 2$ sustav ima bekonačno mnogo rješenja, a za $\lambda \neq 2$ sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = -1$, $x_2 = \lambda + 2$.*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Za koji sustav linearnih jednadžbi kažemo da je homogen? Ima li homogeni sustav uvijek rješenje? Navedite osnovne Gaussove elementarne transformacije koje ne mijenjaju rješivost sustava.*

(b) *Gaussovom metodom pronađite opće rješenje sljedećeg sustava linearnih jednadžbi. Što je opće rješenje pripadnog homogenog sustava?*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \end{array}$$

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) $x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, *gdje je* $x_0 = [3, 5, 0, 0]^T$, $u_1 = [0, -2, 1, 0]^T$, $u_2 = [0, -1, 0, 1]^T$. *Opće rješenje pripadnog homogenog sustava je* $x_H = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Koji uvjet mora ispunjavati matrica $A \in M_n$ *da bi se bez izmjene redaka od nje mogla načiniti LU-dekompozicija?*

(b) Provjerite je li za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ *moguće načiniti LU-dekompoziciju bez izmjene redaka.*

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) Da, jer je: $\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = -7 \neq 0$, $\Delta_3 = 23 \neq 0$.

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) Kako se definira i koja svojstva ima vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$*? Ako je* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$, *izračunajte* $\vec{a} \times \vec{b}$.

(b) Zadan je trokut $\triangle ABC$ *s vrhovima* A, B, C, *nasuprotnim stranicama* a, b, c *i odgovarajućim kutovima pri vrhovima* α, β, γ. *Pokažite da vrijedi omjer* $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$.

Rješenje: Vidi Nastavne materijale. $\vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k}$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prvom kolokviju.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
30. siječnja 2019.

2. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Čemu je jednaka determinanta čiji je r-ti stupac linearna kombinacija dva vektora $\lambda a + \mu b$? Navedite primjer.*

(b) *Hoće li se i kako promijeniti vrijednost determinante ako r-ti i s-ti redak zamijene mjesta? Navedite primjer.*

(c) *Navedite barem jedan slučaj gdje bez izračunavanja determinante (samo na osnovi izgleda determinante) možete zaključiti da njena vrijednost iščezava. Navedite primjer.*

Rješenje: *Nastavni materijali.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Neka je $A \in M_n$. U kakvoj je vezi $\det A^T$ s $\det A$? Priložite primjer.*

(b) *Neka je A matrica s elementima a_{ij}. Napišite Laplaceov razvoj $\det A$ po elementima s-tog retka.*

(c) *Neka je $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Kolika je vrijednost determinante čiji su stupci redom vektori $x_r = [a_1^{r-1}, \ldots, a_n^{r-1}]^T$, $r = 1, \ldots, n$?*

Rješenje: *(a), (b) Nastavni materijali; (c) Vandermondova determinanta.*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Iskažite Cramerov teorem za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$.*

(b) *Diskutirajte i riješite sustav linearnih jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & = & \lambda \\ 2x_1 & + & x_2 & = & \lambda \end{array}$$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $D = \lambda - 2$, $D_1 = 0$, $D_2 = (\lambda - 2)\lambda$. Za $\lambda = 2$ sustav ima bekonačno mnogo rješenja, a za $\lambda \neq 2$ sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = 0$, $x_2 = \lambda$.*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Kada kažemo da je sustav linearnih jednadžbi rješiv? Iskažite Kronecker-Capellijev teorem.*

(b) *Gaussovom metodom pronađite opće rješenje sljedećeg sustava linearnih jednadžbi. Što je opće rješenje pripadnog homogenog sustava?*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 8 \end{array}$$

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) $x = x_0+\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$, gdje je $x_0 = [3,0,2,0]^T$, $u_1 = [2,1,0,0]^T$, $u_2 = [-2,0,0,1]^T$. Opće rješenje pripadnog homogenog sustava je $x_H = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Pretpostavimo da smo za kvadratnu matricu $A \in M_n$ uspjeli odrediti njoj ekvivalentnu gornjetrokutastu matricu $U \in M_n$ konačnom primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima matrice A, a da pri tome nismo koristili izmjenu redaka, tj. $U = Q_r \cdots Q_1 \cdot A$. Kako se odavde može izračunati donjetrokutasta matrica L, takva da je $A = L \cdot U$?

(b) Matrice $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ i $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$ čine LU-dekompoziciju matrice A. Koristeći ovu dekompoziciju riješite sustav $Ax = b$ za $b = [1,1,1]^T$.

Rješenje: (a) $L = Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1}$; (b) $z^\star = [1,2,9]^T$, $x^\star = [2,1,-1]^T$.

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) Kako se definira mješoviti produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$? Koje je njegovo geometrijsko značenje?

(b) Za tri vektora $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ izračunajte $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Što predstavlja dobiveni broj? Zašto je $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) = 0$?

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 3$. $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) = 0$ jer je $\vec{b} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prvom kolokviju.