Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima.
Kolokvij nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
Sve tvrdnje je potrebno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vježbama i/ili predavanjima, navesti na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (15). Neka je $V = \mathbb{R}^3$. Definiramo binarnu operaciju *zbrajanja*

$$x \boxplus y = (x_1 + y_1, 2x_2 + y_2, x_3 + 3y_3), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V,$$

i operaciju *množenja skalarima*

$$\alpha \boxdot x = (x_1, \alpha x_2, x_3), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in V.$$

Provjerite je li skup V s ovako definiranim operacijama vektorski prostor. Ako nije, provjerite koja svojstva iz definicije vektorskog prostora ne vrijede.

Zadatak 2 (20). a) Neka je skup $\{u, v, w\}$ linearno nezavisan. Ispitajte je li tada i skup $\{3u + 2v - w, 2u - v + 3w, 9u - v + 8w\}$ linearno nezavisan.

b) Odredite vrijednosti parametra $k \in \mathbb{R}$ za koje je skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

baza prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Zadatak 3 (25). Neka je dan skup

$$W = \{p_1 + p_2 t + p_3 t^2 + p_4 t^3 : p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}, p_1 - p_2 - p_3 = 0, 3p_2 - 2p_4 = 0\}$$

u vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3.

a) Dokažite da je W potprostor prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

b) Odredite bazu i dimenziju potprostora W.

c) Odredite jedan direktni komplement prostora W u prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Zadatak 4 (20). U prostoru $\mathbb{R}^4$ zadani su potprostori L i M:

$$L = [\{(1,1,1,2), (-1,1,0,-3), (2,0,1,5)\}],$$
$$M = [\{(0,1,1,4), (0,1,0,-5), (0,-1,1,14)\}].$$

Odredite baze i dimenzije potprostora $L + M$ i $L \cap M$.

Zadatak 5 (20). a) Je li operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiran s

$$\mathcal{F}(x, y, z) = (x + y, z^2)$$

linearan?

b) Neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza vektorskog prostora V i $\{f_1, f_2, f_3\}$ baza vektorskog prostora W, te neka je $\mathcal{A} : V \to W$ linearan operator definiran s

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= 2f_1 + 3f_2 - f_3 \\ \mathcal{A}e_2 &= f_1 - f_2 + 2f_3 \\ \mathcal{A}e_3 &= 2f_1 + 2f_2. \end{aligned}$$

Nađite baze za sliku i jezgru operatora $\mathcal{A}$ te odredite rang i defekt.