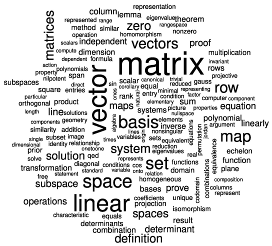

M087 Linearna algebra II

Tema: Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Vježbe 1, 3.3.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija polja

Neka je $\mathbb{F}$ neprazan skup na kojemu su zadane binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ i množenja $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Kažemo da je uređena trojka $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ polje ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F};$

(2) postoji $0 \in \mathbb{F}$ sa svojstvom $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F};$

(3) za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$ postoji $-\alpha \in \mathbb{F}$ tako da je $\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = 0;$

(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F};$

(5) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F};$

(6) postoji $1 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ sa svojstvom $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F};$

(7) za svaki $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ postoji $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ tako da je $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1;$

(8) $\alpha\beta = \beta\alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F};$

(9) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}.$

Definicija vektorskog prostora

Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \forall a, b, c \in V;$

(2) postoji $0 \in V$ sa svojstvom $a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in V;$

(3) za svaki $a \in V$ postoji $-a \in V$ takav da je $a + (-a) = -a + a = 0;$

(4) $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in V;$

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V;$

(6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V;$

(7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall a, b \in V;$

(8) $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in V.$

Zadatak 1.

Neka je $V = \mathbb{R}$. Definiramo binarnu operaciju “zbrajanja”

$$x \boxplus y = \max\{x, y\}, \quad \forall x, y \in V$$

i operaciju množenja skalarima

$$\alpha \boxdot x = \alpha x, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V$$

Skup V s ovako definiranim operacijama nije vektorski prostor. Provjerite koja svojstva iz definicije vektorskog prostora ne vrijede.

Zadatak 2.

Neka je V skup svih pozitivnih realnih brojeva. Definiramo binarnu operaciju “zbrajanja”

$$x \boxplus y = xy, \quad \forall x, y \in V$$

i operaciju ”množenja skalarima”

$$\alpha \boxdot x = x^{\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V$$

Pokažite da je skup V s ovako definiranim operacijama vektorski prostor.

Zadatak 3.

Za realne funkcije f i g definiran je njihov njihov zbroj sa

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

i množenje funkcije skalarima sa

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori:

(a) skup svih funkcija na intervalu $[a, b]$;

(b) skup svih funkcija definiranih na $\mathbb{R}$ takvih da je $f(0) = 1$;

Zadatak 4.

Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori (uz uobičajene operacije s matricama):

(a) skup svih matrica reda 2 nad $\mathbb{R}$ (oznaka $\mathcal{M}_2$);

(b) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;

(c) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;

(c) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5.

Dokažite da je skup $\mathcal{P}_n$ svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n (uz standardne operacije zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom) vektorski prostor.