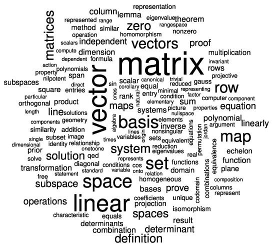


M087 Linearna algebra II

Tema: Linearni operatori

Vježbe 12, 19.5.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija

Neka je A kvadratna matrica reda n. Minimalni polinom matrice A je normirani polinom najmanjeg stupnja kojeg A poništava, tj. normirani polinom μ_A za koji vrijedi:

i) $\mu_A \neq 0$,

ii) $\mu_A(A) = 0$,

iii) ako za polinom p vrijedi $p(A) = 0$, tada $\mathrm{st}(p) \geq \mathrm{st}(\mu_A)$.

Napomena

1) $\mathrm{st}(\mu_A) \leq n$,
2) $\mu_A | p, \forall\, p$ takve da $p(A) = 0$,
3) nultočke od μ_A i k_A su jednake,
4) ako A ima sve jednostruke svojstvene vrijednosti, onda je $\mu_A = (-1)^n k_A$.

Zadatak 1.

(a) Dokažite da matrice oblika aI_n, gdje je I_n jedinična matrica reda n, $a \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$, imaju minimalni polinom koji je prvog stupnja.

(b) Može li matrica 2×2 imati minimalni polinom prvog stupnja ako je različita od aI_n, $a \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$?

Minimalni polinom blok dijagonalne matrice

Teorem

Pretpostavimo da je A *blok dijagonalna matrica* s dijagonalnim blokovima $A_1, A_2, \dots, A_s$. Tada je minimalni polinom od A jednak najmanjem zajedničkom višekratniku minimalnih polinoma dijagonalnih blokova.

Zadatak 2.

Odredite karakteristični i minimalni polinom matrice

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

Zadatak 2.

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

Zadatak 2.

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom blok trokutaste matrice

Teorem

Pretpostavimo da je A *blok trokutasta matrica* s dijagonalnim blokovima $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Tada je karakteristični polinom od A jednak umnošku karakterističnih polinoma dijagonalnih blokova A_i:

$$k_A(\lambda) = k_{A_1}(\lambda) k_{A_2}(\lambda) \cdots k_{A_s}(\lambda).$$

Zadatak 3.

Odredite minimalni polinom matrice

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{bmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

(c)

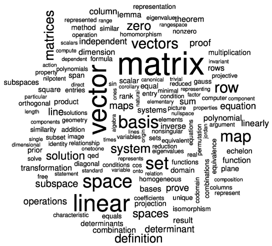
$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4.

Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da A i B imaju različite karakteristične polinome, ali jednake minimalne.



M087 Linearna algebra II

Tema: Unitarni prostori

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. **Skalarni produkt** na V je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{F}$, koje ima sljedeća svojstva:

(1) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in V$

(2) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

(3) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle,\ \forall x_1, x_2, y \in V$

(4) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,\ \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}$

(5) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},\ \forall x, y \in V$

Napomena

- $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$
- $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \overline{\langle y_1 + y_2, x\rangle} = \overline{\langle y_1, x\rangle + \langle y_2, x\rangle} = \overline{\langle y_1, x\rangle} + \overline{\langle y_2, x\rangle} = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$

Definicija

Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se **unitaran prostor**.

Zadatak 1.

Dokažite da je preslikavanje

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

Definicija

Neka je V unitaran prostor. **Norma** na V je funkcija $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ definirana s

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Definicija

Neka je V unitaran prostor. Kaže se da je vektor $x \in V$ **normiran** ako je $||x|| = 1$.

Zadatak 2.

Neka su $x = (1,5)$ i $y = (3,4)$ iz $\mathbb{R}^2$. Odredite:

a) $\langle x, y\rangle$ s obzirom na standardni (Euklidski) skalarni produkt u $\mathbb{R}^2$,

b) $\langle x, y\rangle$ s obzirom na skalarni produkt definiran u prethodnom zadatku,

c) $||y||$ s obzirom na standardni (Euklidski) skalarni produkt u $\mathbb{R}^2$,

d) $||y||$ s obzirom na skalarni produkt definiran u prethodnom zadatku.

Zadatak 3.

Neka je $\mathcal{P}_1$ realan vektorski prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 1. Provjerite je li sljedeće preslikavanje skalarni produkt na $\mathcal{P}_1$:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1), p, q \in \mathcal{P}_1.$$

Zadatak 4.

Dokažite da je preslikavanje

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.