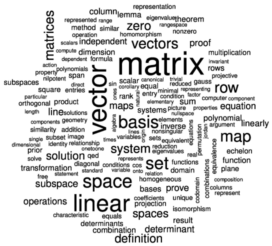


M087 Linearna algebra II

Tema: Unitarni prostori

Vježbe 14, 2.6.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija

Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Kažemo da je operator A **hermitski** ako vrijedi

$$A^* = A.$$

Zadatak 1.

Provjerite koje su od sljedećih matrica hermitske:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.

Dokažite da su sljedeći operatori hermitski za svaki linearan operator T na unitarnom prostoru V :

(a) $H_1 = TT^*$;

(b) $H_2 = T^*T$;

(c) $H_3 = T + T^*$;

(d) $H_4 = T^*T - I$.

Definicija

Neka su V i W unitarni prostori takvi da je $\dim V = \dim W$. Kažemo da je $A \in L(V, W)$ **unitaran operator** ako vrijedi

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Propozicija

Neka je $A \in L(V)$ unitaran operator i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V. Tada za matrični zapis $[A]_e^e$ operatora A vrijedi

$$[A]_e^e([A]_e^e)^* = ([A]_e^e)^*[A]_e^e = I.$$

Definicija

Kaže se da je kompleksna kvadratna matrica A **unitarna** ako vrijedi

$$AA^* = A^*A = I.$$

Realna kvadratna matrica A je **ortogonalna** ako vrijedi

$$AA^T = A^TA = I.$$

Zadatak 3.

Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor i $U \in L(V)$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne

a) $U^* = U^{-1}$;

b) U čuva skalarni produkt;

c) U čuva duljinu vektora.

Zadatak 4.

Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ zadan je linearan operator

$$U(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_3, \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_3, x_2\Big).$$

Provjerite je li operator U unitaran i odredite U^{-1}.

Zadatak 5.

Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ zadan je linearan operator

$$A(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, -x_3, \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\Big).$$

Provjerite je li operator A unitaran i odredite A^{-1}.

Zadatak 6.

Provjerite jesu li sljedeće matrice unitarne:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}$.

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad (a_{ij} \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n)$$

naziva se **kvadratna forma**.

Napomena

Koristeći prikaz $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$ i $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ kvadratnu formu možemo pisati i na sljedeći način

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = x^T Ax.$$

Za matricu $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ kvadratna forma ima oblik

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2.$$

Krivulje drugog reda

Najpoznatije krivulje drugog reda u ravnini M su: kružnica, elipsa, hiperbola i parabola.
Za svaku od navedenih krivulja moguće je izabrati takav pravokutni koordinatni sustav $(O; e_1, e_2)$ u ravnini M tako da su one opisane sljedećim jednadžbama:

$x^2 + y^2 = r^2$ (kružnica radijusa r sa središtem u točki O.)

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa s poluosima $a > 0$ i $b > 0$ i središtem u točki O)

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (hiperbola s poluosima $a > 0$ i $b > 0$ i središtem u točki O)

$y^2 = 2px$ (parabola s parametrom p i tjemenom u točki O)

Definicija

Neka je $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simetrična matrica, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ i $\gamma \in \mathbb{R}$. Jednadžbom $p(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \gamma = 0$ zadana je **krivulja drugog reda**.

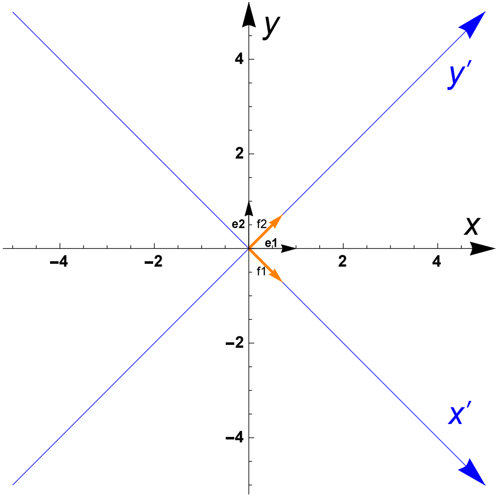
Razlikujemo tri slučaja:

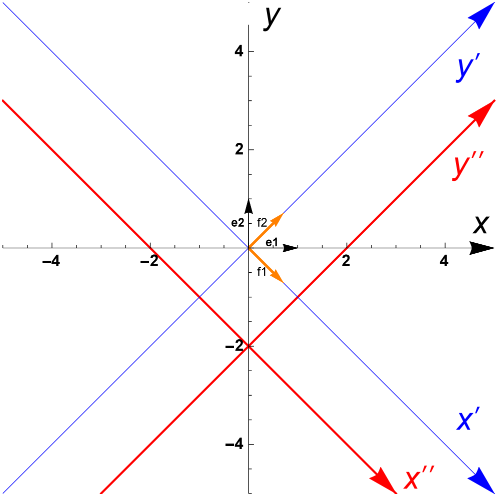
- ako je $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, onda je krivulja elipsa ili skup koji sadrži samo jednu točku ili prazan skup;
- ako je $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$, onda je krivulja hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku;
- ako je $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$, onda je krivulja parabola ili unija dvaju paralelnih pravaca ili jedan pravac ili prazan skup;

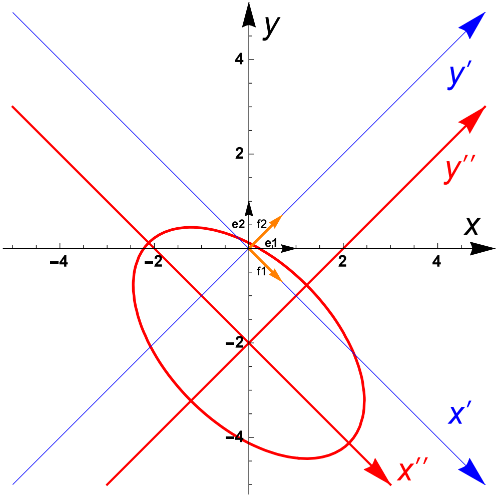
Zadatak 1.

Odredite koja je krivulja dana jednažbom

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x + 8y - 1 = 0.$$


y
4
2
−2
−4
x
−4
−2
2
4
y′
x′
e2
f2
e1
f1


y
4
2
y′
y′′
e2
f2
x
e1
−4
−2
2
4
f1
−2
−4
x′
x′′


y
4
y′
2
y′′
e2
f2
X
e1
−4
−2
2
4
f1
−2
x′
−4
x′′

Zadatak 2.

Odredite koja je krivulja dana jednažbom

$$17x^2 + 8y^2 + 12xy + 5\sqrt{5}x - 5\sqrt{5}y + 12 = 0.$$