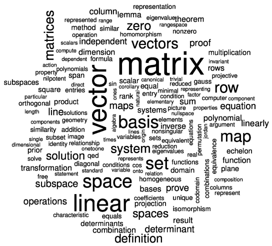

M087 Linearna algebra II

Tema: Linearni operatori

Vježbe 11, 12.5.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Propozicija

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$, neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora A te neka su $x_1, \dots, x_k$ svojstveni vektori pridruženi redom svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Tada je skup $\{x_1, \dots, x_k\}$ linearno nezavisan.

Definicija

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda), \quad p(\lambda_0) \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Broj l zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Tada je

$$d(\lambda_0) \leq l(\lambda_0).$$

Korolar

Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$ te neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Operator A se može dijagonalizirati (tj. postoji baza od V u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica) ako i samo ako su geometrijska i algebarska kratnost svih svojstvenih vrijednosti od A jednake, tj.

$$d(\lambda_i) = l(\lambda_i), \quad \forall \lambda_i \in \sigma(A)$$

Zadatak 1.

Odredite svojstvene polinome sljedećih matrica te mogu li se matrice dijagonalizirati ako je

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{bmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.

Odredite svojstvene polinome sljedećih blok-gornje trokutastih matrica te mogu li se matrice dijagonalizirati

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.

Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odredite parametre a i b ako je poznato da je A singularna te da njezine svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 2.

Teorem (Hamilton-Cayley)

Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Tada vrijedi $k_A(A) = 0$.

Zadatak 4.

Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem odredite inverz sljedećih matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadatak 5.

Dokažite da je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3, x_2 - x_3)$$

regularan, odredite mu matrični prikaz u kanonskoj bazi, odredite pomoću svojstvenog polinoma inverz matrice $[A]_e^e$ te odredite formulu prema kojoj djeluje inverzni operator A^{-1}.

Zadatak 1.

Odredite matricu A ako je zadano da su njene svojstvene vrijednosti i vektori:

$$\lambda_1 = 2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 5, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.

Odredite sve matrice S koje dijagonaliziraju matricu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.

Odredite sve matrice kojima su $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ svojstveni vektori.

Zadatak 4.

Dijagonalizirajte matrice (tj. nađite bazu u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica)

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 5.

Dijagonalizirajte matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 6.

Neka je $A \in L(\mathbb{R}^4)$ singularan i dijagonalizabilan linearan operator te neka su λ_1, λ_2 međusobno različite, nenul svojstvene vrijednosti od A. Ako vrijedi da je algebarska kratnost od λ_1 veća od geometrijske kratnosti od λ_2, odredite rang od A.