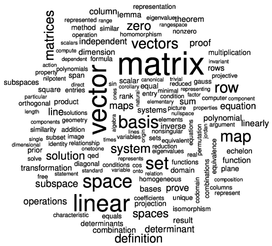

M087 Linearna algebra II

Tema: Unitarni prostori

Vježbe 13, 26.5.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija

Neka je V unitaran prostor. Kaže se da su vektori x, y iz V međusobno **okomiti** ili **ortogonalni** (oznaka: $x \perp y$) ako je

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Konačan skup vektora $\{e_1, \ldots, e_k\}$ je **ortogonalan** ako je $e_i \perp e_j, \forall i \neq j$.
Skup $\{e_1, \ldots, e_k\}$ je **ortonormiran** ako je ortogonalan i ako je $\|e_i\| = 1, \forall i = 1, \ldots, k$.

Zadatak 1.

Neka je na $\mathbb{R}^3$ skalarni produkt definiran s

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Provjerite je li skup $\{e_1, e_2\}$ ortonormiran, ako je

(a) $e_1 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $e_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,

(b) $e_1 = (0, \frac{1}{8}, 0)$, $e_2 = (5, 0, 3)$.

Teorem (Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije)

Neka je dan linearno nezavisan skup $\{v_1, \ldots, v_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, u unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormiran skup $\{e_1, \ldots, e_k\}$ u V takav da je

$$[\{e_1, \ldots, e_j\}] = [\{v_1, \ldots, v_j\}], \ \forall\, j = 1, \ldots, k.$$

Konstrukcija ortonormirane baze

$$\begin{aligned}
f_1 &= v_1, & e_1 &= \frac{1}{||f_1||} f_1, \\
f_2 &= v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1, & e_2 &= \frac{1}{||f_2||} f_2, \\
f_3 &= v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2, & e_3 &= \frac{1}{||f_3||} f_3, \\
&\vdots \\
f_j &= v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle e_i, & e_j &= \frac{1}{||f_j||} f_j.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.

Odredite ortonormiranu bazu za potprostor U od $\mathbb{R}^4$ (sa standardnim skalarnim produktom) razapet s vektorima

$$v_1 = (1,1,1,1), \quad v_2 = (1,1,2,4), \quad v_3 = (1,2,-4,-3).$$

Zadatak 3.

Odredite ortogonalnu i ortonormiranu bazu za potprostor U od $\mathbb{R}^4$ (sa standardnim skalarnim produktom) razapet s vektorima

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -2, 2, 2), \quad v_3 = (1, 2, -3, -4).$$

Zadatak 4.

Neka je na $\mathbb{R}^4$ skalarni produkt definiran s

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4.$$

Odredite ortogonalnu i ortonormiranu bazu za potprostor U od $\mathbb{R}^4$ razapet s vektorima

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -2, 2, 2), \quad v_3 = (1, 2, -3, -4).$$

Zadatak 5.

Odredite ortonormiranu bazu za potprostor $W \in \mathbb{C}^3$ koji je razapet s vektorima

$$v_1 = (1, i, 0), \quad v_2 = (1, 2, 1 - i).$$

Definicija

Neka je V unitaran prostor i neka je $M \leq V$. **Ortogonalni komplement potprostora** M je skup

$$M^{\perp} := \{x \in V : \langle x, v \rangle = 0, \ \forall v \in M\}.$$

Zadatak 1.

Odredite ortogonalnu bazu za $U^\perp$ u $\mathbb{C}^3$ ako je U razapet s $u = (1, i, 1+i)$.

Zadatak 2.

Odredite ortogonalnu bazu za $U^\perp$ u $\mathbb{R}^4$ ako je U razapet s $u = (1, 1, 1, 1)$.

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Postoji jedinstven operator $A^* \in L(V)$ takav da je

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

za sve vektore x, y iz V.

Definicija

Neka je$V$ konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Operator $A^* \in L(V)$ sa svojstvom

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad \forall x, y \in V,$$

zove se **hermitski adjungiran operator** operatoru A.

Propozicija

Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor, te neka je $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza za V. Tada za svaki operator $A \in L(V)$ vrijedi

$$[A^*]_e^e = ([A]_e^e)^*.$$

Zadatak 1.

Za zadane operatore odredite adjungirani operator:

(a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$F(x, y, z) = (3x + 4y - 5z, 2x - 6y + 7z, 5x - 9y + 5z)$,

(b) $G : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$,
$G(x, y, z) = (2x+(1-i)y, (3+2i)x-4iz, 2ix+(4-3i)y-3z)$.

Zadatak 2.

Dokažite da vrijedi:

$$I^* = I, \quad 0^* = 0.$$

Zadatak 3.

Neka je $A \in L(V)$, gdje je V konačno dimenzionalan unitaran prostor. Dokažite da $\langle Au, v\rangle = 0$, $\forall u, v \in V$, povlači da je $A = 0$.