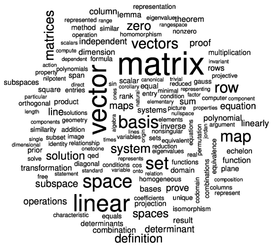

M087 Linearna algebra II

Tema: Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Vježbe 2, 10.3.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija linearne kombinacije

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Izraz oblika

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k,$$

pri čemu su $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ i $k \in \mathbb{N}$, naziva se linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Definicija linearne nezavisnosti

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

konačan skup vektora iz V. Kažemo da je skup S linearno nezavisan ako vrijedi

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

U suprotnom kažemo da je skup S linearno zavisan.

Zadatak 1.

Provjerite je li skup $\{(1,-2,1),(2,1,-1),(7,-4,1)\}$ linearno nezavisan u prostoru $\mathbb{R}^3$?

Zadatak 2.

Provjerite da li su sljedeći skupovi linearno nezavisni u prostoru $\mathbb{R}^4$:

(a) $\{(1,3,-1,4),(3,8,-5,7),(2,9,4,23)\}$;

(b) $\{(1,-2,4,1),(2,1,0,-3),(3,-6,1,4)\}$.

Zadatak 3.

Neka je $\mathcal{P}$ vektorski prostor polinoma nad $\mathbb{R}$. Provjerite je li skup $\{u, v, w\}$ linearno nezavisan ako je

$$\begin{aligned} u(t) &= t^3 + 4t^2 - 2t + 3, \\ v(t) &= t^3 + 6t^2 - t + 4, \\ w(t) &= 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7. \end{aligned}$$

Zadatak 4.

Provjerite jesu li sljedeći skupovi linearno nezavisni u prostoru $\mathcal{P}_3$:

(a) $\{t^3 - 4t^2 + 2t + 3, t^3 + 2t^2 + 4t - 1, 2t^3 - t^2 - 3t + 5\}$;

(b) $\{t^3 - 5t^2 - 2t + 3, t^3 - 4t^2 - 3t + 4, 2t^3 - 7t^2 - 7t + 9\}$.

Zadatak 5.

Neka je V vektorski prostor realnih funkcija realne varijable. Pokažite da je skup $\{f, g, h\}$ linearno nezavisan ako je

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t, \\ g(t) &= \cos t, \\ h(t) &= t. \end{aligned}$$

Zadatak 6.

Neka je $\mathcal{M}_2$ vektorski prostor matrica reda 2. Provjerite je li skup $\{A, B, C\}$ linearno nezavisan ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 7.

Za koje vrijednosti parametra p je skup

$$\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, 4, 0), (1, p, 7, 1)\}$$

linearno nezavisan u prostoru $\mathbb{R}^4$?

Zadatak 8.

Dokažite da je svaki skup matrica koji sadrži nul-matricu linearno zavisan.

Zadatak 9.

Pokažite da je skup $\{v, w\}$, gdje je $v = (1 + i, 2i)$ i $w = (1, 1 + i)$, linearno zavisan nad poljem $\mathbb{C}$, ali linearno nezavisan nad poljem $\mathbb{R}$.

Zadatak 10.

Pokažite da je skup $\{v, w\}$, gdje je $v = (3+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ i $w = (7, 1+2\sqrt{2})$, linearno zavisan nad poljem $\mathbb{R}$, ali linearno nezavisan nad poljem $\mathbb{Q}$.

Zadatak 11.

Pretpostavimo da je skup $\{u, v, w\}$ linearno nezavisan. Pokažite da je tada i skup $\{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ također linearno nezavisan.

Zadatak 12.

Dani su vektori $u = (1, 2, 3)$ i $v = (2, 3, 1)$ iz $\mathbb{R}^3$.

(a) Napišite $w = (1, 3, 8)$ kao linearnu kombinaciju od u i v.

(b) Napišite $w = (2, 4, 5)$ kao linearnu kombinaciju od u i v.

(c) Odredite k tako da je $w = (1, k, 4)$ linearna kombinacija od u i v.

(d) Odredite uvjete na a, b i c tako da je $w = (a, b, c)$ linearna kombinacija od u i v.

Zadatak 13.

Izrazite polinom $v(t) = t^2 + 4t - 3$ iz $\mathcal{P}$ kao linearnu kombinaciju polinoma

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^2 - 2t + 5, \\ p_2(t) &= 2t^2 - 3t, \\ p_3(t) &= t + 1. \end{aligned}$$

Zadatak 14.

Izrazite matricu $M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ iz $\mathcal{M}_2$ kao linearnu kombinaciju matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 15.

Izrazite matricu $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ iz $\mathcal{M}_2$ kao linearnu kombinaciju matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$