Pravila

Pismeni ispit piše se 120 minuta. Da bi se pristupilo usmenom dijelu ispita, potrebno je skupiti barem 45 od 100 mogućih bodova na pismenom ispitu. Ispit se predaje s papirom sa zadacima i radnim listovima. Rezultati ispita bit će objavljeni na web stranici kolegija.

Zadatak 1 (20). Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi jednakost $a+b+c=1$. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}.$$

Zadatak 2 (20). Čine li vektori $\vec{a}=\vec{i}, \vec{b}=2\vec{i}-\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ bazu u $X_0(E)$? Ukoliko čine, Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije sagradite ortonormiranu bazu $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Zatim, vektor $\vec{d}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ prikažite u ortonormiranoj bazi $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Zadatak 3 (20). Riješite matričnu jednadžbu $AX(B^T-7I)=2(A+I)$, gdje je

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&2&-2\\-3&2&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}9&4&5\\-3&2&-7\\1&2&10\end{bmatrix}$$

i izračunajte determinantu matrice AB.

Zadatak 4 (20). Primjenom Cramerovog pravila u ovisnosti o parametru $a\in\mathbb{R}$ diskutirajte sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}3x_1+(a-1)x_2+2x_3&=1\\-3x_1-(a-1)x_2-4x_3&=-1\\(4-a)x_1+2(a-1)x_2&=1.\end{aligned}$$

Zadatak 5 (20). Odredite $\lambda\in\mathbb{R}$ takav da vektori $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\lambda\vec{j}+\lambda\vec{k}$ zadovoljavaju $\lambda+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})$. Za dobiveni λ odredite vektor $\vec{d}$ za koji vrijedi $\vec{b}\times\vec{d}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ i $\vec{b}\cdot\vec{d}=12$. Izračunajte l_1 i l_∞ norme vektora $\vec{d}$.