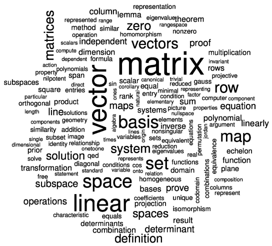

M087 Linearna algebra II

Tema: Linearni operatori

Vježbe 10, 5.5.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević
asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je

$$Ax = \lambda_0 x.$$

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar (operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.

Napomena

a) Vektor x iz navedene definicije naziva se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0.

b) Neka je

$$V_A(\lambda_0) = \{x \in V \ : \ Ax = \lambda_0 x\}.$$

Ovaj skup se naziva svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0.

(c) Ako je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ onda se dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(\lambda_0)$ naziva geometrijska kratnost (ili geometrijski multiplicitet) svojstvene vrijednosti λ_0 i označava se s $d(\lambda_0)$.

Definicija

Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Polinom

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

naziva se svojstveni polinom matrice A.

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi

$$k_A(\lambda) = 0.$$

Zadatak 1.

Odredite svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i svojstvene potprostore matrica A, B, AB, BA i $A+B$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.

Neka je λ svojstvena vrijednost operatora $A \in L(V)$. Pokažite da je tada λ^k svojstvena vrijednost operatora $A^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Zadatak 3.

Odredite svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i svojstvene potprostore matrica A, A^{-1} i A^2 ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4.

Odredite svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i svojstvene potprostore matrice A ako je

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.