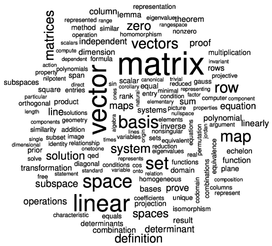

M087 Linearna algebra II

Tema: Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Vježbe 3, 17.3.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević
asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija linearne ljuske

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Linearna ljuska skupa S označava se simbolom $[S]$ i definira kao

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dodatno, definira se $[\emptyset] = \{0\}$.

Definicija sustava izvodnica

Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kaže se da je S sustav izvodnica za V (ili da S generira V) ako vrijedi $[S] = V$.

Definicija baze vektorskog prostora

Konačan skup $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V se naziva baza za V ako je B linearno nezavisan sustav izvodnica za V.

Definicija dimenzije prostora

Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dimenzija prostora V definira se kao broj elemenata bilo koje njegove baze. Dodatno, uzima se da je dimenzija nulprostora 0.

Zadatak 1.

Odredite uvjete za a, b, c tako da vektor (a, b, c) iz $\mathbb{R}^3$ pripada linearnoj ljusci vektora $u_1 = (1, 2, 0)$,$u_2 = (-1, 1, 2)$ i $u_3 = (3, 0, -4)$.

Zadatak 2.

Pokažite da vektori

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,1,1), \\ u_2 &= (1,2,3), \\ u_3 &= (1,5,8) \end{aligned}$$

čine linearno nezavisan sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 3.

Provjerite jesu li sljedeći skupovi baza za $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(1,1,1),(1,0,1)\}$;

(b) $\{(1,2,3),(1,3,5),(1,0,1),(2,3,0)\}$;

(c) $\{(1,1,1),(1,2,3),(2,-1,1)\}$;

(d) $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$.

Zadatak 4.

Provjerite jesu li sljedeći skupovi baza za $\mathbb{R}^4$:

(a) $\{(1,1,1,1),(1,0,1,0),(1,3,5,7)\}$;

(b) $\{(0,1,2,3),(1,2,3,4),(5,1,0,1),(2,3,-1,0),$
$(1,-1,1,3),(-2,1,3,0)\}$;

(c) $\{(1,1,1,1),(1,0,1,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$;

(d) $\{(1,1,2,2),(1,2,1,2),(1,2,3,4),(2,1,0,-1)\}$.

Zadatak 5.

Je li skup

$$S = \{(1, i, 1 + i), (i, 0, i), (1, 1, 1)\}$$

baza prostora $\mathbb{C}^3$?

Zadatak 6.

Neka su u vektorskom prostoru V dani konačni skupovi $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Dokažite da je $[A] = [B]$ ako i samo ako vrijedi

$$a_i \in [B], \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

i

$$b_j \in [A], \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}.$$

Zadatak 7.

U prostoru $\mathbb{R}^3$ dani su vektori

$$a_1 = (1, 3, 1), a_2 = (1, 2, 1),$$

$$b_1 = (-1, 0, -1), b_2 = (-1, -1, -1).$$

Pokažite da vrijedi

$$[\{a_1, a_2\}] = [\{b_1, b_2\}].$$

Teorem

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ baza za V. Tada za svaki $v \in V$ postoje jedinstveno određeni skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da vrijedi

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

Korolar

Neka je V vektorski prostor, te neka je $\dim V = n < \infty$.

(a) Svaki linearno nezavisan skup u V ima n ili manje elemenata. Svaki linearno nezavisan skup u V koji ima točno n elemenata je baza za V.

(b) Svaki sustav izvodnica za V ima n ili više elemenata. Svaki sustav izvodnica za V koji ima točno n elemenata je baza za V.

Zadatak 8.

Neka je $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ baza u vektorskom prostoru V i $b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ neki vektor iz V. Dokažite da je $S = \{a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ baza u V ako i samo ako je $\alpha_i \neq 0,\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.