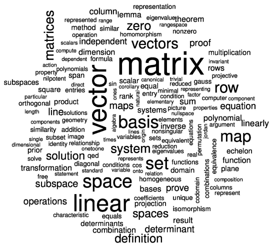

M087 Linearna algebra II

Tema: Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Vježbe 4, 24.3.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Propozicija

Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, sustav izvodnica za vektorski prostor $V \neq \{0\}$. Tada postoji baza prostora V koja je podskup skupa S.

Napomena

Postupak izbacivanja vektora dok se ne dođe do linearno nezavisnog skupa (koji se primjenjuje u dokazu prethodne propozicije) naziva se redukcija sustava izvodnica do baze.

Zadatak 1.

Pokažite da je skup

$$S = \{(1, -1, -1), (2, 1, -1), (3, 0, -1), (9, -3, -10)\}$$

sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$ pa ga reducirajte do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 2.

Pokažite da je skup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

sustav izvodnica za $\mathcal{M}_2$ pa ga reducirajte do baze prostora $\mathcal{M}_2$.

Propozicija

Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, linearno nezavisan skup u konačnodimenzionalnom prostoru V. Tada se A može nadopuniti do baze.

Napomena

Postupak proširenja nezavisnog skupa do baze prostora nikako nije jedinstven.

Zadatak 3.

Nadopunite skup A do baze prostora $\mathbb{R}^4$ ako je

$$A = \{(1, 2, -1, -2), (2, 3, 0, -1)\}$$

Zadatak 4.

Nadopunite skup A do baze prostora $\mathcal{M}_2$ ako je

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Zadatak 5.

Skup $S = \{x, y\}$ nadopunite do baze prostora $\mathbb{R}^4$ ako je $x = (1, 0, -1, 0)$ i $y = (2, 0, 1, 1)$.

Definicija potprostora

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V, kažemo da je M potprostor od V.
Kada je M potprostor od V, pisat ćemo $M \leq V$.

Propozicija

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(i) $a + b \in M, \qquad \forall a, b \in M,$

(ii) $\alpha a \in M, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in M.$

Korolar

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

$$\alpha a + \beta b \in M, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in M.$$

Zadatak 1.

Neka je $V = \mathcal{P}$, vektorski prostor realnih polinoma. Provjerite je li W potprostor od V, ako:

(a) W sadrži sve polinome s cjelobrojnim koeficijentima;

(b) W sadrži sve polinome stupnja ≥ 6 i nul-polinom;

(c) W sadrži sve polinome u kojima se javljaju samo parne potencije od t.

Zadatak 2.

Neka je V vektorski prostor funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokažite da je W potprostor od V ako je:

(a) $W = \{f(x) \ : \ f(1) = 0\}$;

(b) $W = \{f(x) \ : \ f(3) = f(1)\}$;

(c) $W = \{f(x) \ : \ f(-x) = -f(x)\}$.

Zadatak 3.

Provjerite je li W potprostor od $\mathbb{R}^3$ ako W sadrži sve vektore $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ takve da je:

(a) $x_1 = 3x_2$;

(b) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$;

(c) $x_1 \cdot x_2 = 0$;

(d) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

(e) $x_2 = x_1^2$;

(f) $x_1 = 2x_2 = 3x_3$.