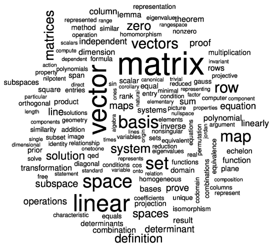


M087 Linearna algebra II

Tema: Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Vježbe 6, 14.4.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Zadatak 1.

Neka su M i L međusobno različiti potprostori prostora V te neka vrijedi

$$\dim L = \dim M = 3, \quad \dim V = 4.$$

Dokažite da je

$$\dim(L \cap M) = 2.$$

Zadatak 2.

Neka su U i W različiti četvero-dimenzionalni potprostori vektorskog prostora V, gdje je $\dim V = 5$. Odredite moguće dimezije za $U \cap W$.

Zadatak 3.

Neka su U i W potprostori vektorskog prostora V, takvi da je $\dim U = 4$, $\dim W = 5$ i $\dim V = 7$. Odredite moguće dimezije za $U \cap W$.

Definicija

Neka je V vektorski prostor te neka su L i M njegovi potprostori. Kažemo da je suma potprostora L i M direktna i tada je označavamo s $L \dot{+} M$ ako je

$$L \cap M = \{0\}.$$

Propozicija

Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Suma $L + M$ je direktna ako i samo ako svaki vektor $v \in L + M$ dopušta jedinstveni prikaz u obliku

$$v = a + b, \qquad a \in L, \quad b \in M.$$

Korolar

Neka potprostori L i M konačnodimenzionalnog prostora V čine direktnu sumu. Tada je

$$\dim(L \dot{+} M) = \dim L + \dim M.$$

Definicija

Neka je V vektorski prostor, te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L ako vrijedi

$$L \dot{+} M = V.$$

Zadatak 4.

Neka su U i W sljedeći potprostori od $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3) \,:\, x_1 = x_2 = x_3\}, \\ W &= \{(0, x_2, x_3) \,:\, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Pokažite da je $\mathbb{R}^3 = U \dot{+} W$.

Zadatak 5.

Neka su U_1, U_2 i U_3 sljedeći potprostori od $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \,:\, x_1 = x_3\}, \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ U_3 &= \{(0, 0, x_3) \,:\, x_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Pokažite da je

(a) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$;

(b) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$;

(c) $\mathbb{R}^3 = U_2 + U_3$.

Koje su sume direktne?

Zadatak 6.

Odredite barem dva direktna komplementa potprostora W u $\mathbb{R}^3$ ako je

(a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \; : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \; : \; x_1 = x_2 = x_3\}$.

Zadatak 7.

Dokažite da je skup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : 2a - b - c = 0, a - b + 2c - d = 0 \right\}$$

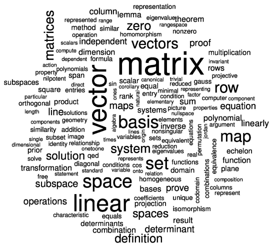
potprostor od $\mathcal{M}_2$. Odredite mu neku bazu i dimenziju te jedan direktan komplement.

Zadatak 8.

Dokažite da je skup

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_1 - x_4\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^4$. Odredite mu neku bazu i dimenziju te jedan direktan komplement.



M087 Linearna algebra II

Tema: Linearni operatori

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Definicija linearnog operatora

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $\mathcal{A} : V \to W$ zove se operator.

Za operator $\mathcal{A}$ kažemo da je aditivan ako za sve $x, y \in V$ vrijedi

$$\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y.$$

Za operator $\mathcal{A}$ kažemo da je homogen ako za sve $x \in V$ i sve $\alpha \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x.$$

Za operator $\mathcal{A}$ kažemo da je linearan ako za sve $x, y \in V$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y.$$

Zadatak 1.

Neka je operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiran s

$$\mathcal{F}(x, y, z) = (yz, x^2).$$

Odredite:

(a) $\mathcal{F}(2, 3, 4)$;

(b) $\mathcal{F}(5, -2, 7)$;

(c) $\mathcal{F}^{-1}(0, 0)$, tj. sve vektore $v \in \mathbb{R}^3$ takve da je $\mathcal{F}(v) = 0$.

Zadatak 2.

Neka je operator $\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiran s

$$\mathcal{G}(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z).$$

Odredite $\mathcal{G}^{-1}(3, 4)$.

Zadatak 3.

Neka je operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiran s

$$\mathcal{F}(x, y) = (3y, 2x).$$

Neka je S jedinična kružnica u $\mathbb{R}^2$. Odredite:

(a) $\mathcal{F}(S)$, tj. sliku od S;

(b) $\mathcal{F}^{-1}(S)$, tj. prasliku od S.

Zadatak 4.

Neka je operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiran s

$$\mathcal{F}(x, y) = (3x + 5y, 2x + 3y)$$

i neka je S jedinična kružnica u $\mathbb{R}^2$. Odredite:

(a) $\mathcal{F}(S)$, tj. sliku od S;

(b) $\mathcal{F}^{-1}(S)$, tj. prasliku od S.

Zadatak 5.

Jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathcal{F}(x, y) = (x + 3, 2y, x + y)$;

(b) $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathcal{G}(x, y) = (2x, x - y, y + x)$;

(c) $\mathcal{H} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \mathcal{H}(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$;

(d) $\mathcal{J} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \mathcal{J}(z) = |z|^2$;

(e) $\mathcal{K} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \mathcal{K}(z) = \overline{z}$?

Napomena: U c), d) i e) provjerite postoji li razlika u zaključku ako $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ promatramo kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, odnosno nad poljem $\mathbb{R}$.

Zadatak 6.

Jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \mathcal{F}(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$;

(b) $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathcal{G}(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$?

Napomena

Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza prostora V. Uzmimo proizvoljan $x \in V$ i napišimo ga u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i.$$

Sada je

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i.$$

Odavde zaključujemo: poznajemo li vektore $Ab_1, \dots, Ab_n$, onda implicitno poznajemo i Ax, za svaki vektor x iz domene.

Propozicija (Zadavanje na bazi i proširenje po linearnosti).

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, neka je $\{b_1, \dots, b_n\}$ bilo koja baza za V i $(w_1, \dots, w_n)$ bilo koja uređena $n-$torka vektora iz W. Tada postoji jedinstven linearan operator $\mathcal{A} : V \to W$ takav da je

$$\mathcal{A} b_i = w_i, \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Zadatak 7.

Koja od sljedećih preslikavanja $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ su linearni operatori:

(a) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1)$;

(b) $\mathcal{A}f(t) = f(t) + 1$;

(c) $\mathcal{A}f(t) = [f(t)]^2$;

(d) $\mathcal{A}f(t) = (f \circ f)(t)$.