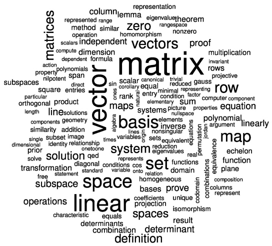

M087 Linearna algebra II

Tema: Linearni operatori

Vježbe 7, 20.4.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević
asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Propozicija.

Neka je $\mathcal{A} : V \to W$ linearan operator.

(i) Ako je $L \leq V$, onda je $\mathcal{A}(L) \leq W$.

(ii) Ako je $M \leq W$, onda je $\mathcal{A}^{-1}(M) \leq V$.

Definicija

Neka je $\mathcal{A} : V \to W$ linearan operator. Potprostori

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathcal{A}(V) = \{\mathcal{A}v \ : \ v \in V\} \leq W$$

i

$$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \ : \ \mathcal{A}x = 0\} \leq V$$

zovu se slika, odnosno jezgra operatora $\mathcal{A}$.
Kad su V i W konačnodimenzionalni, rang i defekt operatora $\mathcal{A}$ definiraju se kao brojevi

$$\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}),$$

odnosno

$$\mathrm{d}(\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{A}).$$

Napomena

Pretpostavimo da je $\mathcal{A} : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, bilo koja baza prostora V. Sada za proizvoljan

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V$$

imamo

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{A} b_i,$$

što pokazuje da je skup $\{\mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_n\}$ sustav izvodnica za $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. Vrijedi, dakle,

$$\mathrm{Im}\mathcal{A} = [\{\mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_n\}] \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{r}(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A}) \le n.$$

Teorem (Teorem o rangu i defektu)

Neka je $\mathcal{A} : V \to W$ linearan operator, te neka je $\dim V < \infty$. Tada je

$$\mathrm{r}(\mathcal{A}) + \mathrm{d}(\mathcal{A}) = \dim V.$$

Zadatak 1.

Neka je $\mathcal{F} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator definiran s

$$\mathcal{F}(x, y, z, s, t) = (x+2y+z-3s+4t, 2x+5y+4z-5s+5t, x+4y+5z-s-2t).$$

Odredite bazu i dimenziju za sliku od $\mathcal{F}$.

Zadatak 2.

Neka je $\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator definiran s

$$\mathcal{G}(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y + 2z).$$

Odredite bazu i dimenziju za jezgru od $\mathcal{G}$.

Zadatak 3.

Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ operator definiran s

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(1,0,0) &= (3,1) \\
\mathcal{A}(0,1,0) &= (0,1) \\
\mathcal{A}(0,0,1) &= (1,1)
\end{aligned}
$$

Dokažite da je $\mathrm{d}(\mathcal{A}) = 1$.

Zadatak 4.

Neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza trodimenzionalnog vektorskog prostora V i neka je $\mathcal{A} : V \to V$ linearan operator definiran s

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= e_1 + e_2 - e_3 \\ \mathcal{A}e_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{A}e_3 &= e_1 - 3e_2 + 3e_3 \end{aligned}$$

Nađite baze za sliku i jezgru operatora $\mathcal{A}$.

Zadatak 5.

(a) Odredite bazu i dimenziju za $\operatorname{Im}\mathcal{G}$ i $\operatorname{Ker}\mathcal{G}$ ako je $\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator definiran s

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$$

(b) Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ operator definiran s

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 2x_1, -x_2, -4x_1 - 3x_2).$$

Dokažite da je $\mathcal{A}$ linearan operator, nađite baze za sliku i jezgru te odredite rang i defekt.

Zadatak 6.

Neka je V vektorski prostor matrica reda 2 nad $\mathbb{R}$ i neka je $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Neka je $\mathcal{F} : V \to V$ linearni operator definiran s

$$\mathcal{F}(A) = AM - MA.$$

Odredite bazu i dimenziju za $\operatorname{Ker} \mathcal{F}$.