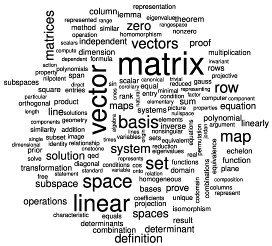

M087 Linearna algebra II

Tema: Linearni operatori

Vježbe 8, 21.4.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević
asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Definiramo skup

$$L(V,W) := \{\mathcal{A} : V \to W,\ \mathcal{A} \text{ linearan operator}\}.$$

Definicija

Za $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V,W)$ definiramo zbroj operatora $\mathcal{A} + \mathcal{B} : V \to W$ s

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x,$$

te za $\mathcal{A} \in L(V,W)$ i $\alpha \in \mathbb{F}$, definiramo množenje operatora skalarom $\alpha\mathcal{A} : V \to W$ s

$$(\alpha\mathcal{A})x = \alpha\mathcal{A}x.$$

Teorem

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Tada je i $L(V,W)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Teorem

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je

$$\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W.$$

Zadatak 1.

Odredite dimenzije sljedećih vektorskih prostora:

(a) $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

(b) $L(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}^2)$

(c) $L(\mathbb{R}^3)$.

(d) $L(\mathbb{C}^3)$.

Zadatak 2.

Ispitajte nezavisnost skupa $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ u prostoru $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ako je

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2, x_1 - x_2 - x_3), \\
\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3), \\
\mathcal{C}(x_1, x_2, x_3) &= (-x_1 - x_2 - 3x_3, x_1 + x_3).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2), \\
\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) &= (2x_1 + x_3, x_1 + x_2), \\
\mathcal{C}(x_1, x_2, x_3) &= (2x_2, x_1).
\end{aligned}$$

Zadatak 3.

Ispitajte nezavisnost skupa $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ u prostoru $L(\mathbb{R}^2)$ ako je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, x_2) &= (x_1, 2x_2), \\ \mathcal{B}(x_1, x_2) &= (x_2, x_1 + x_2), \\ \mathcal{C}(x_1, x_2) &= (0, x_1). \end{aligned}$$

Matrični zapis vektora u paru baza (e, f)

Neka je $\mathcal{A} \in L(V, W)$ te $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V, odnosno W. $\mathcal{A}$ je potpuno određen svojim djelovanjem na bazi: ako znamo $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$, onda znamo potpuno djelovanje operatora A. $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n \in W$ možemo pisati u obliku

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Matrični zapis (prikaz) operatora $\mathcal{A}$ u paru baza (e, f)

$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$$

Zadatak 1.

Nađite matricu operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadanog s

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2)$$

u kanonskom paru baza. Je li operator $\mathcal{A}$ monomorfizam?

Zadatak 2.

Nađite matricu operatora $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanog s

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_2 + 3x_3)$$

u kanonskoj bazi.

Zadatak 3.

Neka je $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ zadana baza u $\mathbb{R}^3$ i neka je

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

zadani vektor. Definirajmo operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s

$$\mathcal{A}b = a \times b.$$

Dokažite da je $\mathcal{A}$ linearan operator i odredite njegovu matricu u bazi e.

Zadatak 4.

Neka je $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ zadana baza u $\mathbb{R}^3$. Pokažite da je formulom

$$\mathcal{A}(x) = (x, a)a,$$

gdje je

$$(x, a) = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3,$$

definiran linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Nađite mu matricu u bazi e ako je $a = e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Koliki je rang matrice operatora?

Zadatak 5.

Operator $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2$ definiran je s

$$\mathcal{A}(p) = (p(0), p(1)).$$

Dokažite da je $\mathcal{A}$ linearan operator i nađite mu matricu u paru kanonskih baza. Je li operator $\mathcal{A}$ monomorfizam? Koliki je rang matrice operatora?

Zadatak 6.

Dokažite da je operator $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{M}_2$ definiran s

$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) + p(-1) & p'(1) + p'(-1) \end{bmatrix}$$

linearan. Nađite mu matricu u paru kanonskih baza te rang i defekt. Je li operator $\mathcal{A}$ monomorfizam?

Zadatak 7.

Neka je V vektorski prostor matrica reda 2 i neka je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definirajmo linearan operator $\mathcal{T} : V \to V$ formulom $\mathcal{T}(A) = MA$.
Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{T}$ u kanonskoj bazi te rang i defekt.
Je li operator $\mathcal{T}$ izomorfizam?

Zadatak 8.

Neka je V vektorski prostor matrica reda 2 i neka je

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Definirajmo linearan operator $\mathcal{T} : V \to V$ formulom $\mathcal{T}(A) = MA - AM$. Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{T}$ u kanonskoj bazi.

Zadatak 9.

Neka je V vektorski prostor matrica reda 2 i neka je

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Definirajmo linearan operator $\mathcal{T} : V \to V$ formulom $\mathcal{T}(A) = AM$.
Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{T}$ u kanonskoj bazi.

Zadatak 10.

Neka je vektorski prostor V zadan svojom bazom

(a) $\{1, t, e^t, te^t\}$;

(b) $\{e^{3t}, te^{3t}, t^2e^{3t}\}$.

Neka je $\mathcal{D}$ operator deriviranja na V. Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{D}$ u danoj bazi te rang i defekt. Je li dani operator izomorfizam?