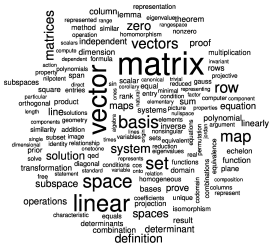

M087 Linearna algebra II

Tema: Linearni operatori

Vježbe 9, 28.4.2023.

predavač: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

asistenti: Marinela Pilj Vidaković

Matrični zapis vektora u bazi e

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven prikaz oblika

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Matrični zapis (prikaz) vektora x u bazi e je

$$[x]^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{F}).$$

Definicija

Matrica

$$[S]_e^e = [I]_{e'}^e,$$

zove se matrica prijelaza iz baze e u bazu e'.

Stupci matrice prijelaza su koeficijenti koji pripadaju vektorima e_j' u rastavu u bazi e, tj.

$$e_j' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

$$[S]_e^e = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}.$$

Korolar.

Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dvije baze za V, te neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$ matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada za svaki vektor x iz V vrijedi

$$[x]^{e'} = ([S]_e^e)^{-1}[x]^e.$$

Zadatak 1.

Neka je e kanonska baza u $\mathbb{R}^3$, a e' neka druga baza od $\mathbb{R}^3$, gdje je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3, \\ e_2' &= e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_3' &= 2e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Nađite prikaz vektora $x = e_1' + e_2'$ u bazi e i vektora $y = e_1 - e_2$ u bazi e'.

Zadatak 2.

Vektor v u bazi e ima prikaz $v = 6e_1 + 9e_2 + 14e_3$. Odredite komponente tog vektora u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3, \\ e_2' &= e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_3' &= e_1 + 2e_2 + 3e_3. \end{aligned}$$

Zadatak 3.

Odredite komponente vektora $v = 6e_1 + 4e_2 + 5e_3 + e_4$ u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ e_2' &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4, \\ e_3' &= e_1 - e_2, \\ e_4' &= e_3 - e_4. \end{aligned}$$

Teorem

Neka je $A \in L(V, W)$ i neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ te $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$, $f' = \{f'_1, \ldots, f'_m\}$ po dvije baze prostora V, odnosno W. Neka su operatori $T \in L(W)$ i $S \in L(V)$ definirani na bazama f, odnosno e, s

$$Tf_i = f'_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

i

$$Se_j = e'_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tada je

$$[A]_{e'}^{f'} = ([T]_f^f)^{-1} [A]_e^f [S]_e^e.$$

Korolar

Neka je $A \in L(V)$, neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V te neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$, matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada je

$$[A]_{e'}^{e'} = ([S]_e^e)^{-1}[A]_e^e[S]_e^e.$$

Propozicija

Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze vektorskih prostora V i W, neka je $x \in V$ i $A \in L(V, W)$. Tada je

$$[Ax]^f = [A]_e^f[x]^e.$$

Zadatak 4.

Operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ u kanonskoj bazi e ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2, \\ e_2' &= e_1 - e_2. \end{aligned}$$

Neka je $x = (2, 1)$ u kanonskoj bazi. Odredite $[Ax]^e$ i $[Ax]^{e'}$.

Zadatak 5.

Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator, e kanonska baza u $\mathbb{R}^3$, a e' neka druga baza, pri čemu je

$$\begin{aligned} e_1' &= 3e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' &= 2e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_3' &= -e_1 + 2e_2 + 5e_3. \end{aligned}$$

Neka je operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e pridružena matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e'.

Zadatak 6.

Operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ u bazi e ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1, \\ e_2' &= e_2 - 3e_3, \\ e_3' &= \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3. \end{aligned}$$

Zadatak 7.

Operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ u bazi e ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 - e_2, \\ e_2' &= e_1 + e_2, \\ e_3' &= e_3. \end{aligned}$$

Zadatak 8.

Linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadan je svojim djelovanjem na vektor $x \in \mathbb{R}^3$ tako da je

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (3x_2+3x_3, x_1-2x_3, -x_1+4x_2+x_3, -2x_1+2x_2-x_3).$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u paru kanonskih baza (e, f), te u paru baza (e', f) gdje je

$$\begin{aligned} e_1' &= (1,1,1), \\ e_2' &= (1,0,1), \\ e_3' &= (1,0,0). \end{aligned}$$

Zadatak 9.

Linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojim djelovanjem na vektor $x \in \mathbb{R}^2$ tako da je

$$\mathcal{A}(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1 - 2x_2, x_1 + 3x_2).$$

(a) Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u paru kanonskih baza (e, f) te u paru baza (e', f') gdje je

$$e'_1 = (1, 3), \quad e'_2 = (2, 5),$$

$$f'_1 = (1, 1, 1), \quad f'_2 = (1, 1, 0), \quad f'_3 = (1, 0, 0).$$

(b) Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u paru baza (e', f') gdje je

$$e'_1 = (1, 2),\quad e'_2 = (1, 1),$$

$$f'_1 = (2, 1, 0),\quad f'_2 = (0, 2, 1),\quad f'_3 = (0, 0, -1).$$

Zadatak 10.

Neka su e, f, g redom kanonske baze za $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$. Dani su linearni operatori $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ te $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 + 2x_3), \\ \mathcal{B}(x_1, x_2) &= (x_1, -x_1 + x_2, -x_2, x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Pokažite da je $[BA]_e^g = [B]_f^g [A]_e^f$.

Zadatak 11.

Odredite neku bazu za jezgru, te rang i defekt operatora $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ kojemu u kanonskoj bazi e pripada matrica

$$[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$