Indeks ________

Ime i prezime ________________

Pravila

Pismeni ispit se piše 2 sata i ukupno nosi 100 bodova od kojih 50 jest za prolaz uz uvijet da su barem dva zadatka cijela riješena. Ispit se predaje s papirom sa zadacima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranicama kolegija u toku dana.

Zadatak 1 (20). Dokažite da je zbroj prvih $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$ prirodnih brojeva jednak

$$1^2 + 3^2 + 9^2 + \cdots + (3^n)^2.$$

Zadatak 2 (20). Na skupu $\mathbb{Z}$ zadana je binarna relacija ρ sa:

$$x\rho y \iff 4|(x^3 - y^3).$$

- Provjerite svojstva relacije ρ.
- Je li ρ relacija ekvivalencije? Ako nije, nadopunite relaciju do najmanje relacije ekvivalencije koja ju sadrži. Ako jest, odredite koliko je klasa ekvivalencije i iz svake klase odredite jednog predstavnika.

Zadatak 3 (20). Ako je polinom $F(x) = f_1(x^3) + f_2(x^3)$ djeljiv s $x^2 + x + 1$, onda su polinomi f_1 i f_2 djeljivi s $x - 1$. Dokažite.

Zadatak 4 (20). Odredite sva rješenja jednažbe $6x^5 - 17x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$. Neka je a po modulu najveće rješenje jednadžbe te riješite $x^a = 1 - \sqrt{3}i$

Zadatak 5 (20). Neka je $f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{-3}{2}\} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \dfrac{ax}{2x+3}$. Odredite parametar $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f \circ f$ bude identiteta. Za tako određen parametar a odredite $(g \circ f)^{-1}(\{e^2, \frac{1}{e}\})$ ako je $g(x) = e^x$.