

PRVI KOLOKVIJ IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

1. (i) [10 bodova] Provjerite je li ekskluzivna disjunkcija tranzitivna logička operacija.

(ii) [10 bodova] Formulu

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x = y^2 \vee y = x^2)$$

zapišite riječima, odredite njenu semantičku vrijednost i negaciju dane formule.

2. [30 bodova] Neka su skupovi $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ dani s

$$A = \{x \in \mathbb{N} : -2x^2 + 5x + 25 \geq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : \frac{5 - 2x}{x + 4} \geq 0\}, \\ C = \{x \in \mathbb{R} : |3x + 5| \leq 7\}$$

(i) Odredite elemente skupova $S_1 = A \cap B \cap C$, $S_2 = A \cup B \cup C$, $S_3 = B \setminus C$, $S_4 = A \Delta B$.

(ii) Skicite skupove $B \times C$ i A^2 .

(iii) Odredite sve $X \subseteq A$ za koje vrijedi $k(X) = 4$ i $X \cap B = \{1, 2\}$.

3. [15 bodova] Dokažite da je za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{3^i} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

4. [15 bodova] Dana je funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 2z^4 + 1$. Odredite sliku skupa $\{3 - 3\sqrt{3}i, 2i\}$ i prasluku skupa $\{-7\}$.

5. [10 bodova] Neka je $\arg z$ argument kompleksnog broja z i neka je $u = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$. Odredite kompleksan broj z sa svojstvom da je

$$\arg(z^4 \cdot i^{21}) = \arg u \quad \text{i} \quad |z| = 6.$$

6. [10 bodova] Ako skupovi A, B imaju svojstvo da je $k(A) = 8$ i $k(B) = 6$, odgovorite na sljedeća pitanja (i obrazložite odgovore):

(a) Da li postoji bijekcija sa skupa A u skup B ?

(b) Da li postoji bijekcija sa skupa B u skup A ?

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.

PRVI KOLOKVIJ IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

1. (i) [10 bodova] Provjerite je li Shefferova operacija tranzitivna logička operacija.

(ii) [10 bodova] Formulu

$$(\forall x \in \mathbf{N})(\exists y \in \mathbf{N})(x = (2y)^2 \Rightarrow 4|x)$$

zapišite riječima, odredite njenu semantičku vrijednost i negaciju dane formule.

2. [30 bodova] Neka su skupovi $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ dani s

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : |3x + 2| \leq 7\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} : \frac{9 - 2x}{x + 6} > 0\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : -2x^2 + 9x + 18 \leq 0\}$$

(i) Odredite elemente skupova $S_1 = A \cap B \cap C$, $S_2 = A \cup B \cup C$, $S_3 = A \setminus C$, $S_4 = A \Delta B$.

(ii) Skicite skupove $A \times C$ i B^2 .

(iii) Odredite sve $X \subseteq B$ za koje vrijedi $k(X) = 3$ i $X \cap A = \{1\}$.

3. [15 bodova] Dokažite da je za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{4^i} = \frac{4}{9} - \frac{3n+4}{9 \cdot 4^n}.$$

4. [15 bodova] Dana je funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 3z^3 + 2$. Odredite sliku skupa $\{3 - 3\sqrt{3}i, 2i\}$ i prasluku skupa $\{26\}$.

5. [10 bodova] Neka je $\arg z$ argument kompleksnog broja z i neka je $u = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}$.
Odredite kompleksan broj z sa svojstvom da je

$$\arg(z^4 \cdot i^{33}) = \arg u \quad \text{i} \quad |z| = 6.$$

6. [10 bodova] Ako skupovi C, D imaju svojstvo da je $k(C) = 6$ i $k(D) = 5$, odgovorite na sljedeća pitanja (i obrazložite odgovore):

(a) Da li postoji bijekcija sa skupa C u skup D ?

(b) Da li postoji bijekcija sa skupa D u skup C ?

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.