Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
26. studenog 2018.

Matematički praktikum (2018./2019.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Definirajte pojam lokalnog i globalnog minimuma funkcije* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(b) *Definirajte optimizacijski problem određivanja najkraće udaljenost točke* $T_0 = (3, 3)$ *do grafa funkcije* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| + 1$. *Skicirajte sliku.*

(c) *Definirajte minimizacijsku funkciju kao kvadrat udaljenosti točke* T_0 *do grafa funkcije* f. *Skicirajte graf minimizirajuće funkcije i odredite lokalni i globalni minimum za ovaj optimizacijski problema.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} F(x)$, $F(x) = \|(3, 3) - (x, f(x))\|$; *(c)* $F(x) = (x - 3)^2 + (3 - f(x))^2$; *Lokalni minimum* $(1.5, 4.5)$; *Globalni minimum* $(3.5, 0.5)$.

Zadatak 2. [10 bodova]
(a) *Kako se definira udaljenost točaka na jediničnoj kružnici? Ako je* $\mathcal{A}$ *skup točaka na jediničnoj kružnici, kako se definira centar skupa* $\mathcal{A}$*?*

(b) *Koliki put prijeđe mala kazaljka na satu duljine* 1 *od 12:00 sati do 19:30 sati? Kolika je udaljenost početne i završne pozicije male kazaljke u tom slučaju?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Pređeni put:* $\frac{5}{4}\pi$; *Udaljenost pozicija:* $\frac{3}{4}\pi$.

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Metoda tangenti za konveksnu derivabilnu funkciju* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *definira se pomoću niza brojeva* (u_n), $u_0 \in [a, b]$ *i niza slomljenih pravaca* $(P_n(u))$, $n = 0, 1, \ldots$. *Dokažite da je niz* $(P_n(u))$ *ograničen odozgo funkcijom* f, *tj. dokažite da vrijedi* $P_n(u) \le f(u)$, $\forall u \in [a, b]$ *i* $\forall n = 0, 1, \ldots$

(b) *Primjenom metode tangenti za funkciju* $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ *i početnu aproksimaciju* $u_0 = 3$ *odredite sljedeće tri aproksimacije točke globalnog minimuma.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $u_i : 3, 0, 1.5, .75$.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Definirajte kvazikonveksnu funkciju* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *na konveksnom skupu* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ *i dokažite da je za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *njen nivo-skup* $\mathcal{D}_\lambda(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \le \lambda\}$ *konveksan.*

(b) *Zadane su funkcije* $f_1(x) = \begin{cases} 1 - (x + 1)^2, & x \in [-3/2, 0) \\ x^2 + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 1 - (x + 1)^2, & x \in [-3/2, 0] \\ x^2 + 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$.
Jesu li ove funkcije kvazikonveksne na $[-3/2, 1]$*? Postižu li globalni minimum na* $[-3/2, 1]$*?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Nisu kvazikonveksne. Funkcija* f_1 *ne postiže globalni minimum, a funkcija* f_2 *postiže globalni minimum u* 0.

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Neka funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *u točki* $x^\star \in D$ *postiže lokalni minimum i neka je* x^k

k-ta aproksimacija. Kako se definira vektor smjera kretanja p^k kod gradijentne metode?

(b) *Neka je $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 5$ i $x_0 = .5$. Odredite vektor smjera kretanja, optimalnu duljinu koraka iz točke x_0 te sljedeću aproksimaciju x_1 i $f(x_1)$ uz primjenu gradijente metode.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $f(x_0) = 3.125$ $f'(x_0) = -3.25$; $p^0 = -f'(x_0) =$; $\alpha_{opt} = .2$; $x_1 = 1.1547$; $f(x_1) = 1.9208$*

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Neka funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, strogo kvazikonveksna nederivabilna funkcija. Sukladno metodi zlatnog reza odredite prvu $x_1^\star$ i drugu $x_2^\star$ aproksimaciju točke globalnog minimuma te odgovarajuće ocjene pogreške za $\Delta x_1^\star$ i $\Delta x_2^\star$.*

(b) *Skicirajte graf funkcije $f\colon [1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|+1$ i sukladno metodi zlatnog reza odredite prvu $x_1^\star$i drugu $x_2^\star$ aproksimaciju točke globalnog minimuma te odgovarajuće ocjene pogreške za $\Delta x_1^\star$ i $\Delta x_2^\star$.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $x_1^\star = 2.5279$; $\Delta x_1^\star \leq 1.5278$; $x_2^\star = 1.9443$; $\Delta x_2^\star \leq 0.9443$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
26. studenog 2018.

B

Matematički praktikum (2018./2019.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Definirajte pojam lokalnog i globalnog maksimuma funkcije* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(b) *Definirajte optimizacijski problem određivanja gore otvorene posude u formi paralelepipeda maksimalnog volumena, koja se može dobiti od pravokutnog komada lima dimenzije* $6 \times 4\,\mathrm{dm}^2$ *izrezivanjem jednakih kvadratića na sva četiri vrha. Skicirajte problem i optimizacijsku funkciju. Ima li ovaj problem samo globalno optimalno rješenje?*

(c) *Odredite dimenzije optimalne posude i njezin volumen u litrama.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} F(x)$, $F(x) = (a-2x)(b-2x)x$; *(c) Dimenzije:* $4.43 \times 2.43 \times 0.78$ (dm); V=8.45 ℓ.

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Metoda tangenti za konveksnu derivabilnu funkciju* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *definira se pomoću niza brojeva* (u_n), $u_0 \in [a,b]$ *i niza slomljenih pravaca* $(P_n(u))$, $n = 0,1,\dots$. *Dokažite da se slomljeni pravac* P_n *podudara s funkcijom* f *u točkama* u_i, $i = 0,1,\dots,n$, *tj. dokažite da vrijedi* $P_n(u_i) = f(u_i)$, $\forall i = 0,1,\dots,n$.

(b) *Primjenom metode tangenti za funkciju* $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2 + 1$ *i početnu aproksimaciju* $u_0 = 0$ *odredite sljedeće tri aproksimacije točke globalnog minimuma.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $u_i : 0, 3, 1.5, .75$.

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kada za funkciju* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *definiranu na konveksnom skupu* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ *kažemo da je kvazikonveksna. Ako je za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *nivo-skup* $\mathcal{D}_\lambda(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \le \lambda\}$ *konveksan, dokažite da je tada funkcija* f *kvazikonveksna.*

(b) *Zadane su funkcije* $f_1(x) = \begin{cases} 2-(x+1)^2, & x \in [-1,0) \\ x^2, & x \in [0,1] \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 2-(x+1)^2, & x \in [-1,0] \\ x^2, & x \in (0,1] \end{cases}$.
Jesu li ove funkcije kvazikonveksne na $[-1,1]$*? Postižu li globalni minimum na* $[-1,1]$*?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Jesu kvazikonveksne.* f_1 *postiže u* 0, *a* f_2 *ne postiže globalni minimum na* $[-1,1]$.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Neka funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *u točki* $x^\star \in D$ *postiže lokalni minimum i nekaje* x^k *k-ta aproksimacija. Kako se definira vektor smjera kretanja* p^k *kod Newtonove metode?*

(b) *Neka je* $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 5$ *i* $x_0 = .5$. *Odredite vektor smjera kretanja, optimalnu duljinu koraka iz točke* x_0 *te sljedeću aproksimaciju* x_1 *i* $f(x_1)$ *uz primjenu Newtonove metode.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $f(x_0) = 3.125$; $p^0 = -f'(x_0)/f''(x_0) = 1.08333$; $\alpha_{opt} = 0.604339$; $x_1 = 1.1547$; $f(x_1) = 1.9208$

Zadatak 5. [10 bodova]

(a) Kako se definira omjer zlatnog reza?

(b) Neka je $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *interval realnih brojeva. Pokažite da točka* $x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)$ *čini zlatni rez intervala* $[a, b]$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Treba pokazati da je* $\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a}$.

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) Neka funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, strogo kvazikonveksna nederivabilna funkcija. Sukladno metodi polovljenja odredite prvu $x_1^\star$ i drugu $x_2^\star$ aproksimaciju točke globalnog minimuma te odgovarajuće ocjene pogreške za $\Delta x_1^\star$ i $\Delta x_2^\star$.
(b) Skicirajte graf funkcije $f\colon [1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|+1$ i sukladno metodi polovljenja uz $\delta = 0.1$ odredite prvu $x_1^\star$ i drugu $x_2^\star$ aproksimaciju točke globalnog minimuma te odgovarajuće ocjene pogreške za $\Delta x_1^\star$ i $\Delta x_2^\star$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale;* *(b)* $x_1^\star = 2.025$; $\Delta x_1^\star \leq 1.025$; $x_2^\star = 1.5375$; $\Delta x^\star 2 \leq 0.5375$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.