Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
25. siječnja 2019.

A

Matematički praktikum (2018./2019.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a)*Kada za funkciju $f\colon \mathcal{D}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna? U kakvoj su vezi skupovi $Lip_L[a,b]$ i $C[a,b]$?*

(b) *Pokažite da je funkcija* $f\colon[0,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -2x+4, & \text{ako je } 0\le x<1\\ x+1, & \text{ako je } 1\le x<2\\ 7-2x, & \text{ako je } 2\le x<3\\ 1, & \text{ako je } 3\le x<4\\ x-3, & \text{ako je } 4\le x\le 6\end{cases}$
Lipschitz-neprekidna i odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu $L>0$. Je li ova funkcija neprekidna na $[0,6]$? Je li derivabilna na $(0,6)$?
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $L=2$; Ova funkcija je neprekidna na $[0,6]$, ali nije derivabilna na $(0,6)$.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Što je $\operatorname*{argmin}_{x\in[a,b]} f(x)$, a što $\min_{x\in[a,b]} f(x)$? Kakve su te veličine za funkciju iz Zadatka 1?*
(b) *Koja svojstva ima niz donjih ograda (P_n) kod metode slomljenih pravaca?*
(c) *Počevši s $u_0=0$ odredite sljedeće tri aproksimacije prema metodi slomljenih pravaca.*
Rješenje: *(a), (b) Vidi Nastavne materijale; (c) $u_1=6$, $u_2=13/4=3.25$, $u_3=19/8=2.375$;*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Za funkciju $f\colon[0,6]\to\mathbb{R}$ iz Zadatka 1. odredite donju ogradu i $\mathcal{B}$-vrijednost ove funkcije na intervalu $[0,6]$ u skladu s metodom DIRECT.*
(b) *U skladu s DIRECT metodom podijelite interval $[0,6]$ na tri jednaka dijela i na svakom odredite $\mathcal{B}$ vrijednost. Kolika je aktualna vrijednost minimuma i u kojoj točki se postiže?*
Rješenje: *a)* $x\mapsto\begin{cases} f(c)+L(x-c), & x\le c\\ f(c)-L(x-c), & x\ge c\end{cases}=\begin{cases} f(3)+2(x-3), & x\le 3\\ f(3)-2(x-3), & x\ge 3\end{cases}=\begin{cases} 2x-5, & x\le 3\\ -2x+7, & x\ge 3\end{cases}$,
$\mathcal{B}=f(c)-L\frac{b-a}{2}=-5$; *b)* $\mathcal{B}_i=0,-1,0$; $\min f(c_i)=\min\{2,1,2\}=1$ *i postiže se u točki* $c_2=3$

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Kako se definiraju potencijalno optimalni intervali kod metode DIRECT?.*
(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 i intervale: $[a_i,b_i]$: $[0,6]$, $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,6]$, $[2,\frac{8}{3}]$, $[\frac{8}{3},\frac{10}{3}]$, $[\frac{10}{3},4]$ nacrtajte točke $T_i=(d_i,f(c_i))$, gdje je d_i poluširina intervala $[a_i,b_i]$, a $f(c_i)$ vrijednost funkcije u centru intervala. Koji od navedenih intervala su potencijalno optimalni?*
Rješenje: *a) Vidi Nastavne materijale; b) Potencijalno optimalni interval je: $[0,6]$*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Neka je $\mathcal{D}=[1,5]\times[2,4]$. Funkciju $g\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, $g(x_1,x_2)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2+1$*

transformirajte u $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$.
(b) *Odredite* $\underset{(x_1,x_2)\in\mathcal{D}}{\operatorname{argmin}}\, g(x_1,x_2)$, $\underset{(x_1,x_2)\in[0,1]^2}{\operatorname{argmin}}\, f(x_1,x_2)$, $\underset{(x_1,x_2)\in\mathcal{D}}{\min}\, g(x_1,x_2)$ *i* $\underset{(x_1,x_2)\in[0,1]^2}{\min}\, f(x_1,x_2)$.

Rješenje: *(a)* $f = g\circ T^{-1}$, $T^{-1}(x_1,x_2)^T = A^{-1}(x_1,x_2)^T + u$, $A^{-1} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$;
$f(x_1,x_2) = (4x_1-1)^2 + (2x_2-1)^2 + 1$ *(b)* $\min(g) = ((2,3),1)$, $\min(f) = ((\frac{1}{4},\frac{1}{2}),1)$.

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) *Ako je* $A \in M_n$ *pozitivno definitna simetrična matrica, što znači da je* $\{u_1,\dots,u_n\}$ *A-ortonormiran skup vektora?*
(b) *Neka je* $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ *i* $b = (1,1,1)^T$. *Pokažite da je je matrica A pozitivno definitna i odredite tri A-ortonormirana vektora.*
(c) *Primjenom metode konjugiranih smjerova riješite sustav* $Ax = b$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale;* *(b)* $u_1 = (1,0,0)^T$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$, $u_3 = (-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}})^T$,
(c) $x^\star = (2,1,0)^T$.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
25. siječnja 2019.

Matematički praktikum (2018./2019.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Kada za funkciju* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, *kažemo da je Lipschitz-neprekidna? U kakvoj su vezi skupovi* $Lip_L[a,b]$ *i* $C^1[a,b]$*?*

(b) *Pokažite da je funkcija* $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{ako je } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{ako je } 1 \le x < 2 \\ 3x-5, & \text{ako je } 2 \le x < 3 \\ -2x+10, & \text{ako je } 3 \le x < 4 \\ x-2, & \text{ako je } 4 \le x \le 6 \end{cases}$
Lipschitz-neprekidna i odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu $L > 0$. *Je li ova funkcija neprekidna na* $[0,6]$*? Je li derivabilna na* $(0,6)$*?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 3$*; Ova funkcija je neprekidna na* $[0,6]$*, ali nije derivabilna na* $(0,6)$*.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Kako se definira globalni minimum funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$*? U koliko točaka se postiže globalni minimum funkcije iz Zadatka 1?*

(b) *Kako se definira i koja svojstva ima donja ograda Lipschitz-neprekidne funkcije* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*?*

(c) *Počevši s* $u_0 = 0$ *odredite sljedeće tri aproksimacije prema metodi slomljenih pravaca.*
Rješenje: *(a), (b) Vidi Nastavne materijale; (c)* $u_1 = 6$, $u_2 = 17/6 = 2.83$, $u_3 = 4/3$*;*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Za funkciju* $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$ *iz Zadatka 1. odredite donju ogradu i* $\mathcal{B}$*-vrijednost ove funkcije na intervalu* $[0,6]$ *u skladu sa Shubertovom metodom.*

(b) *Odredite prve dvije aproksimacije prema Shubertovoj metodi. Usporedite rezultat s onim iz Zadatka 2 koji ste dobili metodom Pijavskog. Što primjećujete?*
Rješenje: *a) Donja ograda:* $x \mapsto \max\{f(a) - L(x-a), f(b) + L(x-b)\}$, $\mathcal{B} = \frac{1}{2}(f(a) + f(b) - \frac{L}{2}(b-a) = -11/2$*; b)* $u_1 = 17/6$, $u_2 = 4/3$ *– aproksimacije se podudaraju s onima iz metode Pijavskog.*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Kako se definiraju potencijalno optimalni intervali kod metode DIRECT?.*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 i intervale:* $[a_i, b_i]$*:* $[0,6]$, $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,6]$, $[2,\frac{8}{3}]$, $[\frac{8}{3},\frac{10}{3}]$, $[\frac{10}{3},4]$ *nacrtajte točke* $T_i = (d_i, f(c_i))$*, gdje je* d_i *poluširina intervala* $[a_i,b_i]$*, a* $f(c_i)$ *vrijednost funkcije u centru intervala. Koji od navedenih intervala su potencijalno optimalni?*
Rješenje: *a) Vidi Nastavne materijale; b) Potencijalno optimalni intervali su:* $[0,6]$, $[0,2]$*.*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{D} = [2,4] \times [1,5]$. *Funkciju* $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $g(x_1,x_2) = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 + 1$

transformirajte u $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$.
(b) Odredite $\underset{(x_1,x_2)\in\mathcal{D}}{\operatorname{argmin}}\, g(x_1,x_2)$, $\underset{(x_1,x_2)\in[0,1]^2}{\operatorname{argmin}}\, f(x_1,x_2)$, $\underset{(x_1,x_2)\in\mathcal{D}}{\min}\, g(x_1,x_2)$ *i* $\underset{(x_1,x_2)\in[0,1]^2}{\min}\, f(x_1,x_2)$.

Rješenje: *(a)* $f = g\circ T^{-1}$, $T^{-1}(x_1,x_2)^T = A^{-1}(x_1,x_2)^T + u$, $A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$; $f(x_1,x_2) = (2x_1-1)^2 + (4x_2-1)^2 + 1$ *(b)* $\min(g) = ((3,2),1)$, $\min(f) = ((\frac{1}{2},\frac{1}{4}),1)$.

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) Ako je $A \in M_n$ *pozitivno definitna simetrična matrica, što znači da je* $\{u_1,\ldots,u_n\}$ *A-ortonormiran skup vektora?*
(b) Neka je $A = \begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ *i* $b = (1,1,1)^T$. *Pokažite da je je matrica A pozitivno definitna i odredite tri A-ortonormirana vektora.*
(c) Primjenom metode konjugiranih smjerova riješite sustav $Ax = b$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale;* *(b)* $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}},0,0)^T$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},0)^T$, $u_3 = (-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}},\sqrt{\frac{2}{5}})^T$, *(c)* $x^\star = (1,2,0)^T$.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.