Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
6. veljače 2019.

A

Matematički praktikum (2018./2019.)

Popravni 1. kolokvija

Zadatak 1. [25 bodova]
(a)*Neka je* $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ *skup točaka s odgovarajućim težinama* $w_i > 0$. *Kako se definira centroid, a kako median skupa* $\mathcal{A}$*?*
(b) *Odredite centorid i medijan skupa*

$$\mathcal{A} = \{(8, -4), (-1, -5), (2, -5), (-5, 3), (1, -5), (10, 8), (-1, -4), (0, 10)\},$$

ako je

(b1) $w_i = 1, \quad i = 1, \ldots, 8,$

(b2) $(w_i)_{i=1,\ldots,8} = \{1, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 1\}.$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale, (b1)* $c^* = (\frac{7}{4}, \frac{-1}{4}), med = [0, 1] \times \{4\}$ *(b2)* $c^* = (\frac{17}{6}, \frac{1}{3}), med = (1, 4)$*;*

Zadatak 2. [15 bodova]
(a) *Kada kažemo da je funkcija* $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}, \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ *kvazikonveksna?*
(b) *Kako je potrebno dodefinirati funkciju* $g : \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R}$ *definiranu s*

$$g(x) = \begin{cases} -x + 5, & x < 5 \\ 2x - 9, & x > 5 \end{cases}$$

u točki $x_0 = 5$ *tako da ona bude kvazikonveksna?*
(c) *Ukoliko je funkcija* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *konveksna i derivabilna, kakva je funkcija* h' *po svojoj monotonosti? Iskažite i dokažite taj rezultat.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)npr. g(5)=0 (c) Vidi nastavne materijale. .*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije* $f : [1, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}$.
(b) *Metodom tangenti odredite prve tri aproksimacije točke globalnog minimuma ove funkcije uz početnu aproksimaciju* $u_0 = 3$. *Koji kriteriji za zaustavljanje ovog iterativnog procesa se mogu primijeniti?.*

Rješenje: *(b)* $\{1, 1.385, 1.813\}$. *Za zadani* $\epsilon > 0$ *može se promatrati* $|x_k - x_{k+1}| < \epsilon$ *ili* $|f'(x_k)| < \epsilon$ *ili unaprijed zadati broj iteracija.*

Zadatak 4. [20 bodova]
Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 < x_1,\ x_0, x_1 \in [a, b]$. *Odredite* $\overline{x} = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}} g(x)$*, gdje je* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *sa sljedećim svojstvima:*

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = f(x_0) =: f_0, \\ g(x_1) &= \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = f(x_1) =: f_1, \\ g'(x_1) &= 2\alpha x_1 + \beta = f'(x_1) =: f'_1. \end{aligned}$$

Rješenje: $\overline{x} = -\frac{\beta}{2\alpha} = x_0 - \frac{1}{2}\frac{(x_0-x_1)f_1'}{f_1' - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}$.

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) Neka je $[a,b] \subset \mathbb{R}$ interval realnih brojeva. Pokažite da točka $x = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$ čini zlatni rez intervala [a,b]

(b) Skicirajte graf funkcije $f\colon [1,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \mid x-3 \mid +2$ i sukladno metodi zlatnog reza odredite prvu x_1^* i drugu x_2^* aproksimaciju točke globalnog minimuma te odgovarajuće ocjene pogreške za Δx_1^* i Δx_2^*.
Rješenje: *(a) Vidi nastavne materijale; (b)* $x_1^* \approx 2.91$; $\Delta x_1^* \leq 1.91$; $x_2^* \approx 2.91$ $\Delta x_2^* \leq 1.18$.

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) Neka je $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ zadana funkcija. Postavite optimizacisjki problem traženja udaljenosti točke $T_0 = (1,1)$ do grafa funkcije f.

(b) Može li se Newtonova iterativna procedura upotrijebiti za rješavanje prethodno spomenutog optimizacijskog problema u slučaju LS udaljenosti i zašto? Uz početnu aproksimaciju $x_0 = 0$, Newtonowom metodom odredite sljedeće dvije aproksimacije.
Rješenje: *(a) Vidi nastavne materijale; (b)* $x_1^* \approx 0.2$; $x_2^* \approx 0.21$.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
6. veljače 2019.

Matematički praktikum (2018./2019.)

Popravni 2. kolokvija

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Kada za funkciju $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*
(b) *Odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu L funkcije $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ definirane s*

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & 1 \le x < 2 \\ 2x - 5, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

te odredite prve tri iteracije metode Pijavskog uz početnu aproksimaciju $u_0 = 0.5$. ***Rješenje:*** *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) L=2, {3,-1,1.5} .*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Neka je $f \in Lip_L[a,b]$, (u_n) niz čvorova i (P_n) niz fukcija dobivenih primjenom metode slomljenih pravaca. Dokažite da je tada $P_n(u) \le f(u), \forall u \in [a,b]$ i $\forall n = 0,1,\ldots$*
(b) *Koja je veza između metode Shuberta i metode Pijavskog?* ***Rješenje:*** *(a), (b) Vidi Nastavne materijale;*

Zadatak 3. [25 bodova]
(a) *Kako se određuje donja ograda funkcije $f \in Lip_L[a,b]$ kod* `DIRECT` *optimizacijskog algoritma?*
(b) *Kako se definiraju potencijalno optimalni intervali kod metode DIRECT?*
(c) *Za funkciju iz Zadatka 1 provedite prva tri koraka* `DIRECT` *optimizacijskog algoritma.*

Rješenje: *(a) (b) Vidi Nastavne materijale; (c) It-1:* $\min = (\frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$*; dijeli se* $[-1,3]$*; It-2:* $\min = (-\frac{17}{9}, -\frac{80}{81})$*; dijeli se* $[\frac{5}{3}, 3]$*; It-3:* $\min = (\frac{17}{9}, -\frac{80}{81})$*; dijeli se* $[\frac{5}{3}, \frac{19}{9}]$

Zadatak 4. [35 bodova]
(a) *Je li funkcija $g\colon [-8,-4] \times [-9,-7] \to \mathbb{R}$, $g(x_1,x_2) = (x_1+6)^2 + (x_2+8)^2$ Lipschitz-neprekidna? Ako jest, odredite joj Lipschitzovu konstantu $L > 0$.*
(b) *Može li se direktno primijeniti* `DIRECT` *algoritam na funkciju g?. Ako ne, koju transformaciju je potrebno izvršiti te kako izgleda transformirana funkcija f?*
(c) `DIRECT` *algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata $[0,1]^2$ na kome je definirana funkcija f. U svakoj iteraciji odredite subpravokutnik s najmanjom $\mathcal{B}$-vrijedosti i trenutnu vrijednost minimuma.*

Rješenje: *(a) $L_g = 4$ (b) $f(x_1,x_2) = (4x_1-2)^2 + (2x_2-1)^2$ (c)$L_f = 16$, It-1:* $\min = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), 0)$*, It-2:* $\min = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), 0)$ *.*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Ako je $A \in M_n$ pozitivno definitna simetrična matrica, što znači da je $\{u_1,\ldots,u_n\}$ A-ortonormiran skup vektora?*

(b) *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $b = (5, -1, 4)^T$. *Pokažite da je je matrica* A *pozitivno definitna i odredite tri* A*-ortonormirana vektora.*

(c) *Primjenom metode konjugiranih smjerova riješite sustav* $Ax = b$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $u_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T$, $u_2 = (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)^T$, $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{4}{\sqrt{15}}, \sqrt{\frac{3}{5}})^T$, *(c)* $x^\star = (1, -1, 1)^T$.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.