Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
28. studenog 2019.

Matematički praktikum (2019./2020.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [15 bodova]
(a) *Što je lokalni minimizator, a što strogi lokalni minimizator funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$*?*

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x-1|+2, & 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}(x-4)^2+1, & 2 \le x < 5 \\ 2, & 5 \le x \end{cases}$ *i odredite lokalne i stroge lokalne minimizatore.*

(c) *Postiže li ova funkcija globalni minimum?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Lokalni minimizatori:* $1, 4$ *i svaka točka iz intervala* $[5,6]$*; Strogi lokalni minimizatori:* 1 *i* 4 *(c) Postiže u točki* $x^\star = 4$*.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Odredite točku* $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ *sa svojstvom da je suma* ℓ_1*-udaljenosti do točaka skupa* $\mathcal{A} = \{(5,3),(0,5),(-1,0),(5,-2),(6,6)\}$ *minimalna. Grafički prikažite problem.*

(b) *Kako će se promijeniti točka* (ξ, η) *ako točku* $(6,6) \in \mathcal{A}$ *zamijenimo točkom* $(15,6)$*?*

Rješenje: *(a)* $\operatorname{med} \mathcal{A} = (5,3)$*; (b) Neće se promijeniti;*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kako se definira najbolji LS-pravac u eksplicitnom obliku* $y = kx + \ell$ *uz podatke* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$*?*

(b) *Zadani su podaci*

i	1	2	3
x_i	-1	1	2
y_i	6	3	5

. Uz početnu aproksimaciju $k_0 = -1$ *odredite prve dvije aproksimacije* (k_j, ℓ_j), $j = 0, 1$ *najboljeg LS-pravca primjenom* Metode sukcesivnih iteracija. *Skicirajte grafove.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $(k_j, \ell_j)\colon (-1, 5.33), (-0.61, 5.07)$*;*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju konveksnosti funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *na konveksnom skupu* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ *i dokažite da je za ovakvu funkciju nivo skup* $\mathcal{D}_\lambda(f)$ *konveksan za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) *Metodom tangenti odredite prve tri aproksimacije lokalnog minimuma funkcije* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + x^3$*?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\{0, 1, 0.67, 0.44\}$ *;*

Zadatak 5. [15 bodova]
(a) *Kakva veza postoji između strogog lokalnog minimizatora i strogog globalnog minimizatora kvazikonveksne funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *definirane na konveksnom skupu* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$*?*

(b) *Ispitajte područja konveksnosti i područja kvazikonveksnosti funkcije iz Zadatka 1.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Konveksna na* $[0,2]$, $[2,5]$, $[5,6]$*; Kvazikonveksna na* $[0,2]$ *i* $[2,6]$*;*

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) *Neka je* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna funkcija definirana na konveksnom skupu* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Kako se definira vektor smjera kretanja kod Newtonove metode minimizacije? Koje svojstvo ima ovakav vektor smjera kretanja?*

(b) *Za početnu aproksimaciju* $x_0 = 1$ *odredite sljedeće dvije aproksimacije dobivene Newtonovom metodom primijenjenoj na funkciju iz Zadatka 4b. Za svaku aproksimaciju izračunajte vrijednost funkcije i apsolutnu vrijednost gradijenta. Koju točnost ste postigli nakon druge iteracije?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\{1, 0, 2\}$, $\{0.67, -0.37, 0, 33\}$, $\{0.58, -0.38, 0.02\}$. *Postignuta je točnost na jednu decimalu;*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
28. studenog 2019.

Matematički praktikum (2019./2020.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [15 bodova]
(a) *Što je globalni minimizator, a što strogi globalni minimizator funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$?

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon \langle -\infty, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2e^x, & -\infty < x \le 0 \\ \sqrt[3]{(x-1)^2} + 1, & 0 < x \le 3 \\ 2, & 3 < x \end{cases}$ *i odredite lokalne i stroge lokalne minimizatore.*

(c) *Postiže li ova funkcija globalni minimum?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Lokalni minimizatori: 1 i svaka točka iz intervala* $(3, 5]$*; Strogi lokalniminimzator je 1; (c) Ne postiže.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Odredite točku* $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ *sa svojstvom da je suma kvadrata* ℓ_2*-udaljenosti do točaka skupa* $\mathcal{A} = \{(5,3), (0,5), (-1,0), (5,-2), (6,6)\}$ *minimalna. Grafički prikažite problem.*

(b) *Kako će se promijeniti točka* (ξ, η) *ako točku* $(6,6) \in \mathcal{A}$ *zamijenimo točkom* $(15,6)$?

Rješenje: *(a)* $\operatorname{mean} \mathcal{A} = (3, \frac{12}{5})$; *(b)* $\operatorname{mean} \mathcal{A} = (\frac{24}{5}, \frac{12}{5})$;

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kako se definira najbolji LS-pravac u eksplicitnom obliku* $y = kx + \ell$ *uz podatke* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$?

(b) *Zadani su podaci*

i	1	2	3
x_i	-1	1	2
y_i	6	3	5

. Uz početnu aproksimaciju $k_0 = 1$ *odredite prve dvije aproksimacije* (k_j, ℓ_j), $j = 0, 1$ *najboljeg LS-pravca primjenom* Metode sukcesivnih iteracija. *Skicirajte grafove.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $(k_j, \ell_j)\colon (1, 4), (-0.167, 4.78)$;

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Za konveksnu derivabilnu funkcije* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *napišite gradijentnu nejednakost.*

(b) *Metodom tangenti odredite prve tri aproksimacije lokalnog minimuma funkcije* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$?

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\{0, -1, -0.67, -0.44\}$;

Zadatak 5. [15 bodova]
(a) *Napišite definiciju kvazikonveksnosti funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *na konveksnom skupu* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ *i dokažite da je za ovakvu funkciju nivo skup* $\mathcal{D}_\lambda(f)$ *konveksan za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) *Ispitajte područja konveksnosti i područja kvazikonveksnosti funkcije iz Zadatka 1.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Konveksna na* $\langle -\infty, 0]$, $[3, 5]$*; kvazikonveksna na* $\langle -\infty, 0]$, $[0, 3]$, $[3, 5]$;

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) *U kakvoj je vezi rekurzivna formula:* $x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} f'(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots,$ *s Newtonovom metodom minimizacije?*

(b) *Za početne aproksimacije* $x_0 = -1$ *i* $x_1 = -0.8$ *odredite sljedeće dvije aproksimacije dobivene navedenom rekurzivnom formulom primijenjenoj na funkciju iz Zadatka 4b. Za svaku aproksimaciju izračunajte vrijednost funkcije i apsolutnu vrijednost gradijenta. Koju točnost ste postigli nakon druge iteracije?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\{-1., 0., 2.\}$, $\{-0.8, -0.29, 0.92\}$, $\{-0.63, -0.38, 0.19\}$, $\{-0.58, -0.38, 0.03\}$. *Postignuta je točnost na jednu decimalu;*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.