Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
24. siječnja 2020.

**A**

**Matematički praktikum (2019./2020.)**

**2. kolokvij**

**Zadatak 1.** [20 bodova]
(a) *Koju brzinu konvergencije ima Metoda polovljenja za kvazikonveksnu derivabilnu funkciju?*

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1.5 - e^{-x^2}$. *Je li ova funkcija strogo kvazikonveksna? Koristeći Taylorovu formulu odredite kvadratnu aproksimaciju* $\phi$ *funkcije* $f$ *u okolini točke* $x_0 = 0$.

(c) *Primjenom metode polovljenja odredite prve tri aproksimacije točke* $x^\star \in \operatorname*{argmin}_{x\in[-1,2]} \phi(x)$.

**Zadatak 2.** [15 bodova]
(a) *Napišite definiciju Lipschitz-neprekidne funkcije. Je li funkcija* $f$ *iz Zadatka 1 Lipschitz-neprekidna? Ako jest, odredite Lipschitzovu konstantu.*

(b) *Odredite donju ogradu funkcije* $f$ *u točki* $u_0 = 1$ *i nacrtajte njezin graf.*

**Zadatak 3.** [20 bodova]
(a) *Uz koje uvjete niz* $(u_n)$ *dobiven metodom Pijavskog konvergira prema točki globalnog minimuma?*

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [-0.5,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{ako } x<1 \\ \frac{3}{2}(x-2)^2+0.5, & \text{ako } x\geq 1 \end{cases}$ *i odredite njenu Lipschitzovu konstantu.*

(c) *Počevši s* $u_0 = 1$ *metodom Pijavskog odredite prve četiri aproksimacije globalnog minimuma* $\operatorname*{argmin}_{x\in[0.5,3]} f(x)$ *i nacrtajte odgovarajuće grafove slomljenih pravaca.*

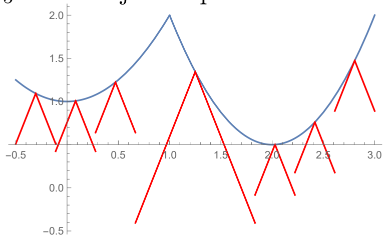
**Zadatak 4.** [15 bodova]
(a) *Kako se kod Shubertove metode za funkciju* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *određuje donja ograda i njena najniža točka* $(U, \mathcal{B})$?

(b) *Za funkciju* $f$ *iz prethodnog zadatka odredite točku* $(U, \mathcal{B})$.

**Zadatak 5.** [20 bodova]
(a) *Kako se definira potencijalno optimalni interval, a kako se određuje na osnovi leme Gablonskog?*

(b) *Treća iteracija za funkciju iz* $f$ *iz Zadatka 3 prikazana je na slici. Identificirajte potencijalno optimalne intervale.*

$Z_5$: Potencijalno optimalni intervali




**Zadatak 6.** [25 bodova]

*(a) Kada za funkciju* $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, *kažemo da je Lipschitz-neprekidna? Za funkciju* $g\colon [0,4] \times [0,3] \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ *odredite Lipschitzovu konstantu* $L > 0$.

*(b) Napravite transformaciju funkcije* $g$ *na* $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *i odredite novu Lipschitzovu konstantu* $L_1$ *za funkciju* $f$.

*(c)* `DIRECT` *algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata* $[0,1]^2$ *na kome je definirana funkcija* $f$. *U svakoj iteraciji odredite subpravokutnik s najmanjom* $\mathcal{B}$-*vrijedosti i trenutnu vrijednost minimuma.*

*(d) Globalni minimum funkcije* $f$ *postiže se u točki* $x^\star = (0.5, 0.333)^T$. *U kojoj točki se postiže globalni minimum funkcije* $g$*?*

---

**Napomena.** Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnom kolokviju.

Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
24. siječnja 2020.

**B**

**Matematički praktikum (2019./2020.)**

**2. kolokvij**

**Zadatak 1.** [20 bodova]

*(a) Skicirajte graf funkcije* $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2+2, & \text{ako } x<1 \\ (x-1)^2+1, & \text{ako } x \geq 1 \end{cases}$. *Je li ova funkcija derivabilna i strogo kvazikonveksna?*

*(b) Primjenom metode polovljenja uz* $\delta = 0.025$ *odredite prve tri aproksimacije točke* $x^\star \in \operatorname*{argmin}_{x\in[0,2]} f(x)$.

**Zadatak 2.** [15 bodova]

*(a) Napišite definiciju Lipschitz-neprekidne funkcije. Je li funkcija* $f$ *iz Zadatka 1 Lipschitz-neprekidna? Ako jest, odredite Lipschitzovu konstantu.*

*(b) Odredite donju ogradu funkcije* $f$ *u točkama* $u_1 = 0$ *i* $u_2 = 2$ *i nacrtajte njihove grafove.*

**Zadatak 3.** [20 bodova]

*(a) Koja svojstva ima niz slomljenih pravaca* $\left(P_n\right)$ *kod metode Pijavskog?*

*(b) Skicirajte graf funkcije* $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2+2, & \text{ako } x<1 \\ (x-1)^2+1, & \text{ako } x<2 \\ -\frac{3}{2}(x-2)^2+2, & \text{ako } x<3 \\ (x-3)^2+0.5, & \text{ako } x \geq 3 \end{cases}$ *i odredite njenu Lipschitzovu konstantu.*

*(c) Počevši s* $u_0 = 2.5$ *metodom Pijavskog odredite prve četiri aproksimacije globalnog minimuma* $\operatorname*{argmin}_{x\in[0,4]} f(x)$ *i nacrtajte odgovarajuće grafove slomljenih pravaca.*

**Zadatak 4.** [15 bodova]

*(a) Kako se kod* `DIRECT` *metode za funkciju* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *određuje donja ograda, a kako* $\mathcal{B}$*-vrijednost na intervalu* $[a,b]$*?*

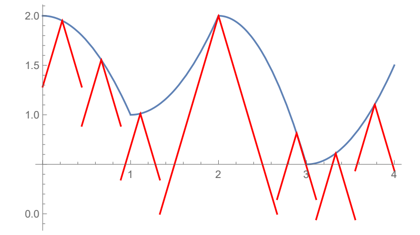
*(b) Za funkciju* $f$ *iz prethodnog zadatka odredite odgovarajuću donju ogradu i* $\mathcal{B}$*-vrijednost.*

**Zadatak 5.** [20 bodova]

*(a) Kako se definira potencijalno optimalni interval, a kako se određuje na osnovi leme Gablonskog?*

*(b) Treća iteracija za funkciju iz* $f$ *iz Zadatka 3 prikazana je na slici. Identificirajte potencijalno optimalne intervale.*

$Z_5$: Potencijalno optimalni intervali




**Zadatak 6.** [25 bodova]

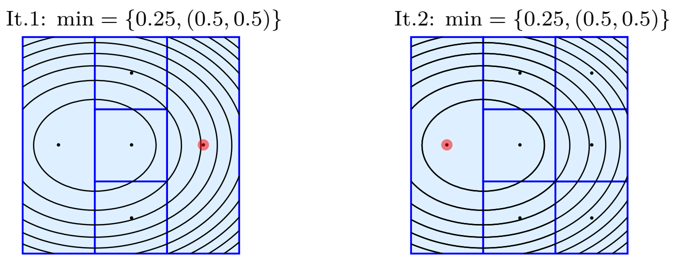
*(a) Kada za funkciju $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna? Za funkciju $g\colon [0,3] \times [0,4] \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$ odredite Lipschitzovu konstantu $L > 0$.*

*(b) Napravite transformaciju funkcije $g$ na $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ i odredite novu Lipschitzovu konstantu $L_1$ za funkciju $f$.*

*(c) `DIRECT` algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata $[0,1]^2$ na kome je definirana funkcija $f$. U svakoj iteraciji odredite subpravokutnik s najmanjom $\mathcal{B}$-vrijedosti i trenutnu vrijednost minimuma.*

*(d) Globalni minimum funkcije $f$ postiže se u točki $x^\star = (0.5, 0.333)^T$. U kojoj točki se postiže globalni minimum funkcije $g$?*

***Rješenje:*** *(a) $L = 4$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$, $f(x_1, x_2) = 9(x_1 - 0.333)^2 + 16(x_2 - 0.5)^2$; $L_1 = L \cdot \|A^{-1}\| = 4 \cdot 4 = 16$; (c) Vidi Sliku 1; U It.1 dijeli se kao na Slici 5.3a jer je $w_1 < w_2$. U It.2 dijeli se subpravokutnik s centrom u $(.5, .5) + \delta e_1$, gdje je $\delta = \frac{1}{3}$; (d) Minimum funkcije $g$ postiže se u točki $u^\star = T^{-1}x^\star = (1, 2)^T$.*




Slika 1: Dijeljenje kvadrata $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ u slučaju funkcije $g(x_1, x_2) = 9(x_1 - .333)^2 + 16(x_2 - .5)^2$. Crvenim točkicama označeni su centri subpravokutnika na kojima se postiže najmanja $\mathcal{B}$-vrijednost

---

**Napomena.** Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnom kolokviju.