Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
27. siječnja 2020.

Matematički praktikum (2019./2020.)

Popravni 1. kolokvija

Zadatak 1. [20 bodova]
(a)Neka je $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ *skup točaka s odgovarajućim težinama* $w_i > 0$. *Kako se definira centroid, a kako medijan skupa* $\mathcal{A}$*?*

(b) Odredite minimum funkcije koja određujem maksimalno apsolutno odstupanje od podataka, $G(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \|x - a^i\|$

$$\mathcal{A} = \{8, -1, -5, 2, 3, 1, -5, 10, 8, -1, -5, -6, 10)\},$$

ako je $w_i = 1, \quad i = 1, \ldots, 8,$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale, (b)* $x^* = \frac{-6+10}{2} = 2$

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) Kako se definira najbolji LS-pravac u eksplicitnom obliku $y = kx + \ell$ *uz podatke* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$*?*

(b) Zadani su podaci

i	1	2	3
x_i	-1	1	2
y_i	4	2	5

. Uz početnu aproksimaciju $k_0 = 1$ *odredite prve dvije aproksimacije* (k_j, ℓ_j), $j = 0, 1$ *najboljeg LS-pravca primjenom* Metode sukcesivnih iteracija. *Skicirajte grafove.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* (k_j, ℓ_j): $(1, 3), (0.33, 3.44)$;

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) Kada kažemo da je funkcija $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}, \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}$ *unimodalna?*

(b) Provjerite je li funkcija $g : \langle -\infty, 5] \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$g(x) = \begin{cases} -2e^x + 4, & -\infty < x \leq 0 \\ \sqrt[3]{(x-1)^2} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ -x + 4, & 2 < x \end{cases}$$

unimodalna?

(c) Ispitajte područja konveksnosti i područja kvazikonveksnosti funkcije g.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) funkcija nije strogo kvazikonveksna pa nije ni unimodlana (c) Konveksna na* $[2, 5]$, *kvazikonveksna na* $\langle -\infty, 2], [2, 5]$.

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) Za konveksnu derivabilnu funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dokažite gradijentnu nejednakost.*

(b) Metodom tangenti odredite prve tri aproksimacije lokalnog minimuma funkcije $f : [-3, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x^3 - 2$ *uz* $x_0 = 0$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\{0, -3, -1.961, -1.264\}$ *;*

Zadatak 5. [15 bodova]
(a) *Što je globalni minimizator, a što strogi globalni minimizator funkcije* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$*?*
(b) *Odredite lokalne i stroge lokalne minimizatore funkcije g iz Zadatka 3.*
Rješenje: *(a) Vidi nastavne materijale; (b) Strogi lokalni minimizatori i loklani minimizatori su* $1, 5$ *.*

Zadatak 6. [20 bodova]
Neka je $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ *zadana funkcija. Može li se Newtonova iterativna procedura upotrijebiti za traženje minimumam zadane funkacije* f*? Ukoliko može, uz početnu aproksimaciju* $(x_0, y_0) = (1, 1)$*, Newtonowom metodom odredite sljedeće tri aproksimacije.*
Rješenje: *Vidi nastavne materijale;* $(x_1, y_1) = (1, 8.5)$*;* $(x_2, y_2) = (1, 5.1912)$*;*$(x_3, y_3) = (1, 4.1367)$*.*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
27. siječnja 2020.

Matematički praktikum (2019./2020.)
Popravni 2. kolokvija

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Kada za funkciju $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*
(b) *Odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu L funkcije $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ definirane s*

$$f(x) = \begin{cases} -3x+8, & 0 \le x < 2 \\ x^2 - 5x + 8, & 2 \le x < 3 \\ -3x + 11, & 3 \le x < 4 \\ -1, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

te odredite prve tri iteracije metode Pijavskog uz početnu aproksimaciju $u_0 = 0$.
(c) *U kojem slučaju bi se aproksimacije dobivene Shubertovom metodom podudarale s aproksimacijama metodom Pijavskog?* ***Rješenje:*** *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) L=3, {0;5;4;3.5}*
.

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Neka je $[a,b] \subset \mathbb{R}$ interval realnih brojeva. Pokažite da točka $x_1 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$ čini zlatni rez intervala $[a,b]$.*
(b) *Neka je $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2+2, & ako\ x < 1 \\ (x-1)^2+1, & ako\ x \ge 1 \end{cases}$. Primjenom metode zlatnog reza odredite prve tri aproksimacije točke $x^\star \in \operatorname*{argmin}_{x\in[0,2]} f(x)$.*

Rješenje: *(a) Treba pokazati da je $\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a}$. (b) {1.236;1.236;1.054}*

Zadatak 3. [10 bodova]
(a) *Je li funkcija iz Zadatka 2 Lipschitz neprekidna?*
(b) *Odredite pripadnu konstantu L.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) L=2*

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Kako se određuje donja ograda funkcije $f \in Lip_L[a,b]$ kod* `DIRECT` *optimizacijskog algoritma?*
(b) *Kako se definiraju potencijalno optimalni intervali kod metode DIRECT?*
(c) *Nad funkcijom f iz Zadatka 2 provedite prve tri iteracije* `DIRECT` *algoritma.*

Rješenje: *(a)(b) Vidi Nastavne materijale (c)* $\min = (1,1)$.

Zadatak 5. [35 bodova]
(a) *Odredite preslikavanje $T : [1,4] \times [2,6] \to [0,1]^2$, koje pravokutnik $[1,4] \times [2,6]$ preslikava u kvadrat $[0,1]^2$. Je li T linearan operator? Odredite inverzno preslikavanje T^{-1}.*
(b) *Neka je $g : [1,4] \times [2,6] \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = (x-1)^2 + (y-4)^3$. Definirajte funkciju f tako da*

pomoću preslikavanja T transformirate funkciju g na $[0,1]^2$.

(c) *Jesu li funkcije f i g Lipschitzove, ako jesu odredite im pripadne konstante L?*

(d) *`DIRECT` algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata $[0,1]^2$ na kome je definirana funkcija f. U svakoj iteraciji odredite subpravokutnik s najmanjom $\mathcal{B}$-vrijedosti i trenutnu vrijednost minimuma.*

Rješenje: *(a) $T(x) = A(x-u)$, $T^{-1}(x) = A^{-1}x + u$, $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;vidi Nastavne materijale (b) $f(x_1,x_2) = 9(x_1)^2 + (4x_2-2)^3$ (c)$L_g = 12$; $L_f = L_g \cdot \|A^{-1}\| = 12 \cdot 4 = 48$; (d)*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnim zadaćama.