Sveučilište u OsijekuOdjel za matematiku
3. veljače 2021.

Matematički praktikum (2020./2021.)

Popravni 1. kolokvija

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Definirajte lokalni i globalni minimizator i lokalni i globalni minimum funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) *Neka je* $q\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $q(x) = (x-2)^2 - 3$ *zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja najkraće* ℓ_2*-udaljenosti točke* $T_0 = (3,2)$ *do grafa funkcije* q. *Skicirajte odgovarajuću sliku.*

(c) *Nacrtajte graf minimizirajuće funkcije. Što su lokalni, a što globalni minimizatori? Koliki je lokalni, a koliki globalni minimum?*

Zadatak 2. [15 bodova]
(a) *Zadan je skup podataka* $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ *s odgovarajućim težinama* $w_i > 0$. *Riješite globalno optimizacijski problem* $\operatorname*{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{m} w_i (y_i - \alpha)^2$.

(b) *Je li minimizirajuća funkcija konveksna? Ako je rješenje problema iz (a) točka* $\alpha^\star$, *napišite odnos minimizirajuće funkcije u točki* $\alpha^\star$ *i u proizvoljnoj točki* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) *Ako je* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ *skup podataka, pokažite da najbolji Least Squares pravac s jednadžbom* $y = kx + \ell$ *prolazi centroidom podataka* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{A} = \{a_i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ *skup točaka. Kako se definira centroid, kako medijan, a kako geometrijski medijan skupa* $\mathcal{A}$ *?*

(b) *Odredite centroid i medijan skupa* $\mathcal{A} = \{(3,-5,2), (2,8,-9), (3,8,0), (1,0,2)\}$.

(c) *Može li se geometrijski medijan proizvoljnog skupa* $\mathcal{A}$ *postići u nekoj od točaka skupa* $\mathcal{A}$? *Obrazložite svoju tvrdnju!*

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Napišite definiciju konveksne i kvazikonveksne funkcije definirane na konveksnom skupu* $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) *Za konveksnu derivabilnu funkciju* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *napišite gradijentnu nejednakost i objasnite njen geometrijski smisao.*

(c) *Primjenom metode tangenti na funkciju* $f\colon [-4,-2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} - 3x^2 + 4$ *uz početnu aproksimaciju* $u_0 = -2$ *odredite sljedeće tri aproksimacije točke globalnog minimuma.*

Zadatak 5. [20 bodova]
Neka je $f(x,y) = 3x^4 + xy + y^4 + y^2$ *zadana funkcija. Može li se Newtonova iterativna procedura upotrijebiti za traženje minimumam zadane funkacije* f? *Ukoliko može, uz početnu aproksimaciju* $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$, *Newtonowom metodom odredite sljedeće tri aproksimacije.*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 100 bodova.

Sveučilište u OsijekuOdjel za matematiku
3. veljače 2021.

Matematički praktikum (2020./2021.)

Popravni 2. kolokvija

Zadatak 1. [20 bodova]
(b) *Definirajte omjer zlatnog reza i označite ga s* $\frac{1}{x}$. *Pokažite da točke:* $\xi_1 = a + (1-x)(b-a)$ *i* $\xi_2 = a + x(b-a)$ *dijele interval* $[a,b]$ *u omjeru zlatnog reza.*

(c) *Za funkciju* $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x-1| + 2$ *odredite prve tri iteracije metodom zlatnog reza.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Kako se definira Lipschitz-neprekidna funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$?

(b) *Koje metode za jednodimenzionalnu minimizaciju Lipschitz-neprekidnih funkcija poznajete?*

(c) *Je li funkcija iz Zadatka 1c Lipschitz-neprekidna? Ako jest, odredite njezinu najmanju Lipschitzovu konstantu* L?

(d) *Je li funkcija* $f\colon [-2,1] \times [-2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 - 5x^2 + y^3$ *Lipschitz-neprekidna? Ako jest, odredite njenu Lipschitzovu konstantu.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0, \\ 2(x-1)^2 - 2, & x \geq 0, \end{cases}$ *i odredite njenu najmanju Lipschitzovu konstantu* L.
(b) *Počevši od* $u_0 = 2$ *provedite prve tri iteracije metode Pijavskog i izradite odgovarajuće ilustracije (slike).*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Kako se kod Shubertove metode definira* $\mathcal{B}$*-vrijednost intervala* $[a,b]$ *na kome je funkcija* f *Lipschitz-neprekidna s konstantom* $L > 0$?

(b) *Odredite* $\mathcal{B}$*-vrijednosti intervala koji se pojavljuju u prvom i drugom koraku Shubertovog algoritma za funkciju iz prethodnog Zadatka 3a.*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Kako se između intervala* $[a_1,b_1], \ldots [a_n,b_n]$ *definiraju potencijalno optimalni?*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 3a odredite prve tri iteracije* `DIRECT` *metodom.*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 100 bodova.