Sveučilište u OsijekuOdjel za matematiku
27. studenog 2020.

Matematički praktikum (2020./2021.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [15 bodova]
(a) *Definirajte lokalni i globalni minimizator i lokalni i globalni minimum funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) *Neka je* $q\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $q(x) = |x-2| + 1$ *zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja najkraće* ℓ_1*-udaljenosti točke* $T_0 = (3,3)$ *do grafa funkcije* q*. Skicirajte odgovarajuću sliku.*

(c) *Nacrtajte graf minimizirajuće funkcije. Što su lokalni, a što globalni minimizatori? Koliki je lokalni, a koliki globalni minimum?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Vidi Nastavne materijale; (c) Lokalni minimizatori su sve točke iz skupa* $[0,2] \cup [3,4]$*. Globalni minimizatori su sve točke iz skupa* $[3,4]$*. Lokalni minimum je* 1 *ili* 3*, a globalni* 1*.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Kako se definira stopa promjene neprekidne derivabilne funkcije* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *u točki* $t \in \mathbb{R}$*?*

(b) *Zadan je konačni vremenski niz podataka* (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ *Kako se može izračunati prosječna stopa promjene u intervalu* $[0, t_m]$?

(c) *Porast populacije određen je eksponencijalnom funkcijom* $y(t) = y_0\, e^{ct}$*, gdje je* y_0 *broj jedinki populacije u trenutku* $t = 0$*. Odredite vrijeme udvostručenja populacije. Ako je* $c = 0.25$*, tj. 25%, koliko je vrijeme udvostručenja?*

Rješenje: *(a)* $s(t) := \frac{f'(t)}{f(t)}$*; (b) Kao parametar* c *pripadne eksponencijalne model-funkcije* $t \mapsto b\, e^{ct}$ *ili aproksimativno kao* $\sqrt[m-1]{\frac{y_m}{y_1}}$ *itd. (c)* $t_2 \approx 2.8$*.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Zadan je skup podataka* $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ *s odgovarajućim težinama* $w_i > 0$*. Riješite globalno optimizacijski problem* $\operatorname*{argmin}_{\alpha\in\mathbb{R}} \sum\limits_{i=1}^{m} w_i (y_i - \alpha)^2$.

(b) *Je li minimizirajuća funkcija konveksna? Ako je rješenje problema iz (a) točka* $\alpha^\star$*, napišite odnos minimizirajuće funkcije u točki* $\alpha^\star$ *i u proizvoljnoj točki* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) *Ako je* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ *skup podataka, pokažite da najbolji Least Squares pravac s jednadžbom* $y = kx + \ell$ *prolazi centroidom podataka* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Rješenje: *(a)* $\alpha^\star = \frac{1}{W} \sum\limits_{i=1}^{m} w_i y_i$, $W = \sum\limits_{i=1}^{m} w_i$*; (b)* $\sum\limits_{i=1}^{m} w_i (y_i - \alpha)^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{m} w_i (y_i - \alpha^\star)^2$
(c) Nastavni materijali.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{A} = \{a_i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ *skup točaka. Kako se definira centroid, kako medijan, a kako geometrijski medijan skupa* $\mathcal{A}$ *?*

(b) *Odredite centroid i medijan skupa* $\mathcal{A} = \{(3,5), (8,9), (8,0), (10,2)\}$.

(c) *Može li se geometrijski medijan proizvoljnog skupa* $\mathcal{A}$ *postići u nekoj od točaka skupa* $\mathcal{A}$*?*

Obrazložite svoju tvrdnju!

Rješenje: *(a) centroid:* $\operatorname*{argmin}_{i=1}^{m} \|c-a_i\|_2^2$, *medijan:* $\operatorname*{argmin}_{i=1}^{m} \|c-a_i\|_1$, *geom.medijan:* $\operatorname*{argmin}_{i=1}^{m} \|c-a_i\|_2$; *(b) centroid:* $(\frac{29}{4}, 4)$, $\operatorname{med}\mathcal{A} = \{c \in \mathbb{R}^2 : c_1 = 8, c_2 \in [2,5]\}$; *(c) Može, primjerice za* $n = 1$ *geometrijski medijan je jednak medijanu koji je za neparan* m *točka iz skupa* $\mathcal{A}$.

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Napišite definiciju konveksne i kvazikonveksne funkcije definirane na konveksnom skupu* $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) *Za konveksnu derivabilnu funkciju* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *napišite gradijentnu nejednakost i objasnite njen geometrijski smisao.*

(c) *Primjenom metode tangenti na funkciju* $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 1$ *uz početnu aproksimaciju* $u_0 = 0$ *odredite sljedeće tri aproksimacije točke globalnog minimuma.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c)* $u_i : 0, 2, 1.33, 0, 89$.

Zadatak 6. [20 bodova]

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 < x_1$, $x_0, x_1 \in [a,b]$. *Odredite* $\overline{x} = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, *gdje je* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *sa sljedećim svojstvima:*

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = f(x_0) =: f_0, \\ g'(x_0) &= 2\alpha x_0 + \beta = f'(x_0) =: f_0', \\ g'(x_1) &= 2\alpha x_1 + \beta = f'(x_1) =: f_1'. \end{aligned}$$

Kako se u literaturi zove ova metoda?

Rješenje: $\overline{x} = -\frac{\beta}{2\alpha} = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f_1' - f_0'} f_0'$ – *Metoda sekanti, čija generalizacija je Quasi-Newton Method.*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.