Sveučilište u OsijekuOdjel za matematiku
25. siječnja 2021.

Matematički praktikum (2020./2021.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Koje metode za jednodimenzionalnu minimizaciju strogo kvazikonveksnih funkcija poznajete?*

(b) *Definirajte omjer zlatnog reza i označite ga s* $\frac{1}{x}$. *Pokažite da točke:* $\xi_1 = a + (1-x)(b-a)$ *i* $\xi_2 = a + x(b-a)$ *dijele interval* $[a,b]$ *u omjeru zlatnog reza.*

(c) *Za funkciju* $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}|x-1|+1$ *odredite podinterval* $[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, \xi_2], & \kappa \geq 0, \\ [\xi_1, b_0], & \kappa < 0, \end{cases}$ *gdje je* $\kappa := \frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}$, *njegovo polovište* x_1, *i vrijednost funkcije u polovištu* $f(x_1)$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Vidi Nastavne materijale; (c)* $\kappa = 0.5$, $[a_1, b_1] = [0, 2.472]$, $x_1 = 1.236$, $f(x_1) = 1.118$.

Zadatak 2. [15 bodova]
(a) *Kako se definira Lipschitz-neprekidna funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$?

(b) *Je li funkcija iz Zadatka 1c Lipschitz-neprekidna? Ako jest, odredite njezinu najmanju Lipschitzovu konstantu* L?

(c) *Je li funkcija* $f\colon [-3,1] \times [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ *Lipschitz-neprekidna? Ako jest, odredite njenu Lipschitzovu konstantu.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Jest.* $L = 0.5$;
(c) Jest. $\max\limits_{x\in[-3,1],\, y\in[-3,3]} |6x^2 + 10x|) = 24$, $\max\limits_{x\in[-3,1],\, y\in[-3,3]} |2xy + 2y| = 12$, $L = 24$.

Zadatak 3. [25 bodova]
(a) *Pokažite da je* $K(u; u_0) = f(u_0) - L|u - u_0|$ *donja ograda Lipschitz-neprekidne funkcije. Navedite dva osnovna svojstva funkcije* K.

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ (x-1)^2 - 1, & x \geq 0, \end{cases}$ *i odredite njenu najmanju Lipschitzovu konstantu* L.

(c) *Počevši od* $u_0 = 2$ *provedite prve tri iteracije metode Pijavskog i izradite odgovarajuće ilustracije (slike).*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 2$; *(c)* $u_1 = -1$, $u_2 = 0.75$, $u_3 = 0.359$ *ili* $u_3 = 1.141$.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Kako se kod Shubertove metode definira* $\mathcal{B}$*-vrijednost intervala* $[a,b]$ *na kome je funkcija* f *Lipschitz-neprekidna s konstantom* $L > 0$?

(b) *Odredite* $\mathcal{B}$*-vrijednosti intervala koji se pojavljuju u prvom i drugom koraku Shubertovog algoritma za funkciju iz prethodnog Zadatka 3b.*

Rješenje: *(a)* $\mathcal{B}(a,b,f,L) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{L}{2}(b-a)$; *(b) Korak 1:* $\mathcal{B}(-1, 2, f, 2) = -2.5$, *Korak 2:* $\mathcal{B}(-1, 0.75, f, 2) = -1.72$, $\mathcal{B}(0.75, 2, f, 2) = -1.72$.

Zadatak 5. [15 bodova]
(a) *Kako se definira donja ograda Lipschitz-neprekidne funkcije* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *s konstantom* $L > 0$ *kod* `DIRECT`*-algoritma? Što je u tom slučaju* $\mathcal{B}$*-vrijednost?*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 3b odredite donju ogradu i* $\mathcal{B}$*-vrijednost na intervalu* $[-1, 2]$.

Rješenje: *(a)* $K(x) = f(c) - L|x - c|$, $\mathcal{B}(c, d) = f(c) - Ld$, *gdje je* $d = (b - a)/2$.
(b) $K(x) = -3/4 - 2|x - 1/2|$, $\mathcal{B} = -15/4$

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) *Kako se između intervala* $[a_1, b_1], \ldots [a_n, b_n]$ *definiraju potencijalno optimalni?*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 3b i intervale* $[a_i, b_i]$*:* $[-1, 0], [0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1], [1, 2]$ *nacrtajte točke* $T_i = (d_i, f(c_i))$*, gdje je* d_i *poluširina intervala* $[a_i, b_i]$*, a* $f(c_i)$ *vrijednost funkcije u centru intervala. Koji od navedenih intervala su potencijalno optimalni?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale;* *(b)* $[2/3, 1]$, $[1, 2]$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnom kolokviju.