Ime i prezime ______________________

Pravila

Pismeni ispit se piše 2 sata i ukupno nosi 110 bodova od kojih 45 jest za prolaz. Ispit se predaje s papirom sa zadacima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranicama kolegija.

Zadatak 1 (20). Neka je $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normalna matrica. Dokažite da je

$$|x^* N x| \leq \rho(N) ||x||_2^2$$

za sve $x \in \mathbb{C}^n$.

Zadatak 2 (25). Može li se sustav $Ax = b$ riješiti Jacobijevom metodom. Ako može, odredite potreban broj koraka tako da apsolutna greška u $|| \cdot ||_1$ bude manja od 10^{-3}. Zadano je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odredite prve tri aproksimacije rješenja Jacobijevom metodom.

Zadatak 3 (20). Neka je dano m točaka $(u^{(i)}, v^{(i)})$, gdje je $u^{(i)} \in \mathbb{R}^{n-1}$ i $v^{(i)} \in \mathbb{R}$. Želimo odrediti $\alpha \in \mathbb{R}^{n-1}$ i $\beta \in \mathbb{R}$ koji minimiziraju

$$\sum_{i=1}^{m} \mid \alpha^T u^{(i)} + \beta - v^{(i)} \mid^2 .$$

Pokažite da se taj problem može preformulirati kao standardni problem najmanjih kvadrata

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||_2,$$

za specijalan odabir matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i vektora $b \in \mathbb{R}^m$.

Zadatak 4 (25).

- ⋆ Iskažite teorem o Varijacijskom principu (Dirichletov princip) te dokažite jedan od smjerova po izboru.

Zadatak 5 (20). Dokažite tvrdnju: Ako je A nesingularna i $r = ||A^{-1}E|| < 1$, tada je $A + E$ nesingularna i vrijedi

$$||(A+E)^{-1} - A^{-1}|| \leq \frac{||E|| \, ||A^{-1}||^2}{1 - r}.$$