Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Rezultati kolokvija će biti na Teams kanalu kolegija u toku iduća 4 dana.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (10).

- Neka je $u \in \mathbb{R}^m$ i $v \in \mathbb{R}^n$. Neka je $E = uv^T$. Koristeći definiciju matrične norme $\|\cdot\|_\infty$ zapišite $\|E\|_\infty$ pomoću vektorskih normi $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$.

Zadatak 2 (15).

- Neka je dan sustav $Ax = b$. Odredite QR dekompoziciju matrice A te koristeći algoritam za rješavanje linearnih jednadžbi pomoću QR dekompozicije, riješite sustav ako je

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3 (5+10+20).

- ⋆ Definirajte faktor rasta elemenata matrice A.
- ⋆ Koja je gornja međa faktora rasta elemenata matrice A? Dokažite svoju tvrdnju.
- Neka je

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -12 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & \alpha^2 - 3 \\ 2 & 1 & -2 & \alpha \\ -3 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

gdje je parametar α realan broj. Izračunajte LU faktorizaciju s pivotiranjem matrice A u ovisnoti o parametru α, te obrazložite za koje parametre α je matrica A regularna. Odredite matrice L, P, U za $\alpha = -2$ te riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = [-4, 2, 1, 2]^T$. Odredite faktor rasta matrice A.

Zadatak 4 (5+15+10).

- ⋆ Pokažite koja je veza između pogreške u k-toj aproksimaciji i početne pogreške u Jacobijevoj metodi za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$.
- Neka je dan sustav $Ax = b$. Odredite matricu permutacije P tako da se sustav $PAx = Pb$ može riješiti Jacobijevom metodom i odredite potreban broj koraka da greška u $||\cdot||_\infty$ bude manja od 0.005, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -9 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

uz početni vektor $x^{(0)} = [1, 0, -3]^T$. Također odredite prve dvije aproksimacije.

- $\star$ Dokažite da Jacobijeva metoda za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$ konvergira ako je matrica A strogo dijagonalno dominantna po stupcima.

Zadatak 5 (10+10).

- $\star$ Neka je $Ax = b$, $b \neq 0$ i $\tilde{x}$ aproksimacija rješenja. Dokažite da je

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \cdot \|b\|_\infty \leq \kappa(A) \cdot \|A\tilde{x} - b\|_\infty \cdot \|x\|_\infty.$$

- $\star$ Neka je $\|\cdot\|_2$ matrična norma inducirana Euklidskom vektorskom normom. Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica takva da je $AA^* = A^*A$ i $x \in \mathbb{C}^n$. Pokažite da je

$$\|Ax\|_2 \leq \rho(A) \cdot \|x\|_2.$$