Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 130 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Rezultati kolokvija će biti na Teams kanalu kolegija u toku iduća 4 dana.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (10).

- Konstruirajte Householderovu matricu H tako da poništi $x_2, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}$, pri čemu je x_7 nepromjenjena. Neka je vektor $x = [1, -1, 2, 5, 1, 3, -2, 1, -1, 2]^T$. Napišite čemu je jednako Hx.

Zadatak 2 (20).

- Neka je
$$A = \begin{bmatrix} 20 & -10 & -1 & \dots & -1 \\ 10 & 20 & -10 & \ddots & \vdots \\ 1 & 10 & 20 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -10 \\ 1 & \dots & 1 & 10 & 20 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{15\times 15}.$$
Matricu unesite u Matlab koristeći naredbe ugrađene u Matlab.
Dopušta li matrica A LU dekompoziciju bez pivotiranja?
Koristeći Matlab funkciju *lu* odredite LU dekompoziciju matrice te pomoću supstitucija unaprijed i unatrag riješite sustav $Ax = b$, ukoliko je
$b = [29, -20, 20, -20, 20, -20, 20, -20, 20, -20, 20, -20, 20, -20, 11]^T$. Koje je rješenje sustava?

Zadatak 3 (45). Neka je dan sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 20 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 19 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{10\times 10}, \quad b = [2, 4, 6, \dots, 20]^T \in \mathbb{C}^{10}.$$

- Provjerite može li se dani sustav riješiti Jacobijevom metodom te metodom najbržeg silaska. Precizno iskažite tvrdnje koje ste koristili pri provjeri.
- Napravite programe koji Jacobijevom metodom i metodom najbržeg silaska određuju aproksimaciju rješenja danog sustava tako da norma $||\cdot||_\infty$ reziduala bude manja od 0.0001. Za početnu aproksimaciju uzmite nul-vektor. Prilikom određivanja sljedeće aproksimacije u Jacobijevoj metodi, linearni sustav riješite pomoću for petlje, bez korištenja naredbe \ .

- Koliko je koraka bilo potrebno napraviti u Jacobijevom algoritmu?
- Koliko je koraka bilo potrebno napraviti s metodom najbržeg silaska?
- Navedite aproksimaciju i normu reziduala dobivenu Jacobijevom algoritmu.
- Navedite aproksimaciju i normu reziduala dobivenu metodom najbržeg silaska.
- Koliko koraka bi bilo potrebno napraviti u Jacobijevom algoritmu da nam je uvjet bio da je norma $||\cdot||_\infty$ greške u odnosu na pravo rješenje manja od 0.0001?

Zadatak 4 (5+10).

⋆ Zapišite uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pomoću singularnih vrijednosti matrice A.

⋆ Neka je $A = U\Sigma V^*$ singularna dekompozicija matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ te neka je prvih r singularnih vrijednosti netrivijalno. Dokažite da vrijedi $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

Zadatak 5 (20+20).

⋆ Napišite osnovni QR algoritam za izačunavanje svojstvenih vrijednosti opće dijagonalizibilne matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, te obrazložite zašto algoritam konvergira ka Schurovoj formi.

⋆ Iskažite i dokažite teorm Bauera – Fike-a, odnosno izvedite ocjenu za $|\lambda - \mu|$, gdje je μ svojstvena vrijednost matrice $A + E$, a λ neka svojstvena vrijednost matrice A.