



## Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Rezultati kolokvija će biti na Teams kanalu kolegija u toku iduća 4 dana.

**Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.**

---

### Zadatak 1 (25).

- ★ Konstruirajte sustav diferencijalnih jednačbi drugog reda koji opisuje titranje u jednoj dimenziji (npr. duž osi  $x$ )  $n$  masa  $m_1, \dots, m_n$  povezanih s  $n + 1$  oprugom čije su krutosti  $k_1, \dots, k_{n+1}$ .

### Zadatak 2 (20).

- ★ Opišite barem dvije metode kojima možemo riješiti ODJ 3. reda

$$\begin{aligned} a_1 x'''(t) + a_2 x''(t) + a_3 x'(t) + a_4 x(t) + a_5 &= f(t), \\ x'''(0) &= x_3, x'(0) = x_2, \\ x'(0) &= x_1, x(0) = x_0. \end{aligned}$$

### Zadatak 3 (25).

- ★ Iskažite teorem o Varijacijskom principu (Dirichletov princip) te dokažite jedan od smjerova po izboru.

### Zadatak 4 (20).

- ★ Dokažite da je funkcija  $u \in C^2[0, \ell]$ , za koju je  $u(0) = 0$ , i koja minimizira funkcional

$$F(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell a(x) (w'(x))^2 dx - \int_0^\ell f(x) w(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell b(x) w(x)^2 dx,$$

rješenje rubnog problema:

$$(a(x) u'(x))' - b(x) u(x) + f(x) = 0, \quad u(0) = 0, u'(\ell) = 0.$$

### Zadatak 5 (20).

- ★ Neka je dana diferencijalna jednačba

$$-u''(t) + \sin(1 + t^2)u'(t) + (1 + t^2)u(t) = -3(1 + t^2) \quad \text{na} \quad \Omega = (0, 1),$$

s rubnim uvjetima  $u(0) = -2.08$ ,  $u(1) = -2.29$ . Koristeći teorem o monotonosti rješenja običnih diferencijalnih jednačbi, prodiskutirajte rješenje: Da li postoji? Je li jedinstveno? Koje su donje, a koje gornje granice za rješenje?