Primijenjena i inženjerska matematika

Statistika - predavanje 5

Statističko zaključivanje - dvije varijable

Zaključivanje o razlikama u očekivanjima i proporcijama

10.11.2023.

Razlike u distribuciji između dviju varijabli

- dolazi li do promjene obilježja koje proučavamo zbog provođenja neke aktivnosti, u nekom drugom trenutku ili općenito u nekim drugim uvjetima?
- **nevezani** i **vezani uzorci** (zavisni) - primjeri 6.1, 6.2 i 6.3
- jesu li ove razlike uočene na uzorcima statistički značajne ili ne?
- kažemo da analiziramo jedno obilježje u dva **tretmana**
- cilj je utvrditi mogu li se razlike koje uočavamo pripisati samo slučajnosti ili ima razloga vjerovati da su izazvane postojanjem razlika između stvarnih distribucija promatranih slučajnih varijabli (razlike su **statistički značajne**)

Usporedba očekivanja - nevezani uzorci

- pretpostavimo da imamo dva nezavisna slučajna uzorka:
  - $X_1^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)}$ slučajan uzorak iz slučajne varijable $X^{(1)}$
  - $X_1^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)}$ slučajan uzorak iz slučajne varijable $X^{(2)}$
- želimo usporediti očekivanje μ_1 slučajne varijable $X^{(1)}$ i očekivanje μ_2 slučajne varijable $X^{(2)}$
- uzorci ne sadrže iste jedinke

Usporedba očekivanja - nezavisni uzorci iz normalno distribuiranih populacija s poznatim varijancama (z-test)

- pretpostavke:
  - $X^{(1)} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$
  - $X^{(2)} \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
  - σ_1^2 i σ_2^2 poznati
- nul-hipoteza:

$$H_0 : \ \mu_1 = \mu_2$$

- test-statistika:

$$Z = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{X}_{n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

  gdje su n_1 i n_2 veličine uzoraka, $\overline{X}_{n_1}$ i $\overline{X}_{n_2}$ su aritmetičke sredine
- ako H_0 vrijedi, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- na temelju podataka izračunamo vrijednost za Z – označit ćemo je $\hat{z}$
- ako je H_0 istinita, očekujemo da je $\hat{z}$ blizu 0

Usporedba očekivanja - nezavisni uzorci iz normalno distribuiranih populacija s poznatim varijancama (z-test)

- p-vrijednost – vjerojatnost da test-statistika bude jednaka ili ekstremnija od $\hat{z}$:
  - $p = P(Z \geq \hat{z})$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : \mu_1 > \mu_2$
  - $p = P(Z \leq \hat{z})$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : \mu_1 < \mu_2$
  - $p = P(Z \in \langle -\infty, -|\hat{z}|] \cup [|\hat{z}|, \infty\rangle)$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- uočimo:

$$
\begin{aligned}
P(Z \in \langle -\infty, -|\hat{z}|] \cup [|\hat{z}|, \infty\rangle) &= P(Z \geq |\hat{z}|) + P(Z \leq -|\hat{z}|) \\
&= 2P(Z \geq |\hat{z}|) = 2P(Z \leq -|\hat{z}|)
\end{aligned}
$$

  p-vrijednost dvostranog testa je dvostruka p-vrijednost jednostranog testa
- tako izračunatu p-vrijednost uspoređujemo s razinom značajnosti α:
  - ako je $p \leq \alpha$ odbacujemo nul-hipotezu na razini značajnosti α
  - ako je $p > \alpha$ ne odbacujemo nul-hipotezu na razini značajnosti α
- zadatak

Usporedba očekivanja - nezavisni uzorci iz normalno distribuiranih populacija s nepoznatim varijancama (Welchov t-test)

- u praktičnim problemima σ_1 i σ_2 gotovo nikad nisu poznati
- pretpostavke:
  - $X^{(1)} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$
  - $X^{(2)} \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
  - σ_1^2 i σ_2^2 nepoznate
- nul-hipoteza:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

Usporedba očekivanja - nezavisni uzorci iz normalno distribuiranih populacija s nepoznatim varijancama (Welchov t-test)

- test-statistika:

$$T = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{X}_{n_2}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

gdje su n_1 i n_2 veličine uzoraka, $\overline{X}_{n_1}$ i $\overline{X}_{n_2}$ su aritmetičke sredine i

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_{n_1}^2 + (n_2 - 1)s_{n_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- ako H_0 vrijedi, T ima Studentovu t-distribuciju s brojem stupnjeva slobode koji se određuje aproksimativno (ako je poznato da su varijance jednake onda je broj stupnjeva slobode $(n_1 + n_2 - 2)$)
- na temelju podataka izračunamo vrijednost za T – označit ćemo je $\hat{t}$
- ako je H_0 istinita, očekujemo da je $\hat{t}$ blizu 0

Usporedba očekivanja - nezavisni uzorci iz normalno distribuiranih populacija s nepoznatim varijancama (Welchov t-test)

- p-vrijednost – vjerojatnost da test-statistika bude jednaka ili ekstremnija od $\hat{t}$:
  - $p = P(T \geq \hat{t})$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : \mu_1 > \mu_2$
  - $p = P(T \leq \hat{t})$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : \mu_1 < \mu_2$
  - $p = P(T \in \langle -\infty, -|\hat{t}|] \cup [|\hat{t}|, \infty\rangle) = 2P(T \geq \hat{t})$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- tako izračunatu p-vrijednost uspoređujemo s razinom značajnosti α:
  - ako je $p \leq \alpha$ odbacujemo nul-hipotezu na razini značajnosti α
  - ako je $p > \alpha$ ne odbacujemo nul-hipotezu na razini značajnosti α
- primjer 6.5

Usporedba očekivanja - nevezani veliki uzorci

- u slučaju velikih uzoraka možemo koristiti Welchov t-test
- zadatak 6.5

Usporedba očekivanja - vezani uzorci

- često u praksi imamo potrebu za uspoređivanjem varijabli u vezanim tretmanima - npr. ako želimo uspoređivati rezultate testa za iste bolesnike prije i nakon liječenja
- slučajevi se moraju pratiti u paru
- zaključci se donose na temelju razlika varijabli u pojedinim tretmanima

ispitanik	tretman 1	tretman 2	razlika
1	x_1	y_1	$d_1 = x_1 - y_1$
2	x_2	y_2	$d_2 = x_1 - y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	$d_n = x_1 - y_n$

Table 1: Razlike vrijednosti varijabli u promatranim tretmanima

Usporedba očekivanja - vezani uzorci

- neka je $X_1, \dots, X_n$ slučajan uzorak prije tretmana iz slučajne varijable s očekivanjem μ_1 i $Y_1, \dots, Y_n$ slučajan uzorak poslije tretmana iz slučajne varijable s očekivanjem μ_2
- želimo testirati

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

nasuprot jednoj od alternativnih hipoteza:

$$H_1: \ \mu_1 > \mu_2 \qquad H_1: \ \mu_1 < \mu_2 \qquad H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

Usporedba očekivanja - vezani uzorci

- slučajne varijable razlika $D_i = X_i - Y_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- očekivanje slučajne varijable razlika $D_i = X_i - Y_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, može se dobiti kao razlika očekivanja μ_1 i μ_2 slučajnih varijabli X_i i Y_i, tj.
$$\mu_D = \mu_1 - \mu_2.$$
- testiranje hipoteze
$$H_0 : \ \mu_1 = \mu_2$$
može se svesti na testiranje ekvivalentne hipoteze $H_0 : \mu_D = 0$ koja se odnosi na očekivanje slučajne varijable razlika
- test se može koristiti za velike uzorke, a za male uzorke ako su razlike normalno distribuirane
- primjer 6.6

Usporedba proporcija - nevezani veliki uzorci

- želimo testirati jednakost proporcija (ili vjerojatnosti događaja) u dvije nevezane populacije
- nul-hipoteza:

$$H_0 : \ p_1 = p_2$$

- test-statistika:

$$Z' = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}, \quad \hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

  gdje su n_1 i n_2 veličine uzoraka, $\hat{p}_1$ i $\hat{p}_2$ su relativne frekvencije "uspjeha" u prvom odnosno drugom uzorku
- ako H_0 vrijedi, Z' ima približno $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ za velike uzorke
- na temelju podataka izračunamo vrijednost za Z' – označit ćemo je $\hat{z}$
- ako je H_0 istinita, očekujemo da je $\hat{z}$ blizu 0

Usporedba proporcija - nevezani veliki uzorci

- p-vrijednost – vjerojatnost da test-statistika bude jednaka ili ekstremnija od $\hat{z}$:
    - $p = P(Z \geq \hat{z})$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : p_1 > p_2$
    - $p = P(Z \leq \hat{z})$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : p_1 < p_2$
    - $p = P(Z \in \langle -\infty, -|\hat{z}|] \cup [|\hat{z}|, \infty\rangle) = 2P(Z \geq \hat{z})$ ako je alternativna hipoteza oblika $H_1 : p_1 \neq p_2$
- tako izračunatu p-vrijednost uspoređujemo s razinom značajnosti α:
    - ako je $p \leq \alpha$ odbacujemo nul-hipotezu na razini značajnosti α
    - ako je $p > \alpha$ ne odbacujemo nul-hipotezu na razini značajnosti α
- primjer 6.8

$\leftrightsquigarrow$