Upute

Vijeme pisanja kolokvija je 120 minuta. Na kolokviju je moguće ostvariti najviše 50 bodova. Korištenje pomoćnih materijala nije dozvoljeno.

Zadatak 1. (2+4+4=10 bodova)
Neka je $X = (X_t,\, t \geq 0)$ slučajni proces sa skupom stanja $\mathbb{R}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(a) Navedite definicijske zahtjeve koje proces X mora zadovoljavati da bi bio Brownovo gibanje.

(b) Ako je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje, pokažite da je i njegova transformacija $X = (X_t,\, t \geq 0)$, gdje je

$$X_t = B_{T-t} - B_T$$

za proizvoljni $T > 0$ za kojega je dobro definirana, također Brownovo gibanje.

(c) Odredite funkciju autokovarijanci procesa X iz zadatka (b) te analizirajte njegovu slabu i strogu stacionarnost.

Zadatak 2. (3+4+5+6+2=20 bodova)
Pretpostavimo da je broj igrača u kockarnici koja radi non-stop modeliran Poissonovim procesom $N = (N_t,\, t \geq 0)$.

(a) Ako je očekivani broj igrača u kockarnici u jednom satu 50, odredite vjerojatnost da se u kockarnici između 10 i 11 sati te između 22 i 23 sata nalazi jednak broj igrača.

(b) Ako pretpostavimo da je svaki deseti igrač varalica, kolika je vjerojatnost da se u jednom satu u kockarnici nađu barem dvije varalice, a kolika da je broj varalica jednak broju poštenih igrača?

(c) U skladu s pretpostavkom zadatka (b), odredite očekivano vrijeme između ulaska prve varalice i dvadesetog poštenog igrača.

(d) Zanemarimo varalice i poštene igrače te uzmimo u obzir samo spol igrača. Pretpostavimo da su vjerojatnosti da je igrač muškarac i da je igrač žena jednake. Nadalje, pretpostavimo da je Dan žena i da kockarnica, u igri u kojoj je s jednakim vjerojatnostima moguće ostvariti gubitak (-1) i dobitak 1, ženama omogućuje da ništa ne izgube (0) i da ostvare dvostruki dobitak (2). Odredite ukupni očekivani dobitak ostvaren u kockarnici u sat vremena.

(e) Općenito definirajte Poissonov proces koji bi bio realniji model za broj igrača u kockarnici i obrazložite zašto smatrate da je taj model realniji?

Zadatak 3. (3+2+5+5+5=20 bodova)
Algoritam kojim trading roboti automatizirano trguju na burzi temelji se na Markovljevom lancu u neprekidnom vremenu $X = (X_t,\ t \geq 0)$ sa skupom stanja $S = \{-1, 0, 1, 2\}$, pri čemu vrijeme brojimo u satima (npr. $t = 1$ označava stanje trading robota nakon jednog sata trgovanja). Stanje (-1) označava da je robot na gubitku, 0 da robot ne gubi i ne zarađuje ništa (gubitak/zarada je 0), 1 da robot zarađuje, a 2 da je robot van funkcije. Testiranjem je utvrđeno da je algoritam robota loš:

- ako uđe u stanje gubitka, robot nastavlja trgovati s gubitkom
- ako je gubitak/zarada 0, brzina napuštanja tog stanja i brzina prijelaza u stanje gubitka su 1
- ako robot zarađuje, brzina napuštanja tog stanja je 3, a brzine prijelaza u stanje gubitka, stanje u kojem je gubitak/zarada 0 i stanje nefunkcionalnosti su 1
- jednom kad robot postane nefunkcionalan, takav i ostaje.

Rješavanjem sljedećih zadataka vjerojatnosno opišite funkcioniranje ovog trading robota.

(a) Općenito objasnite dinamiku Markovljevog lanca $X = (X_t,\ t \geq 0)$ sa skupom stanja S pomoću pripadnog lanca skokova, niza vre-mena skokova i niza vremena čekanja/zadržavanja u stanjima iz S.

(b) Odredite generatorsku matricu Markovljevog lanca X veznog uz trading robota iz zadatka te matricu 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti pripadnog lanca skokova.

(c) Odredite vjerojatnost da robot koji je u stanju 0 (gubitak/zarada je 0) postane nefunkcionalan nakon jednog dana trgovanja.

(d) Odredite vjerojatnost da robot koji zarađuje nastavi zarađivati sljedećih deset dana.

e) Odredite vjerojatnost da brže dođe do prve promjene stanja za robota koji inicijalno zarađuje nego za robota za kojega je inicijalno gubitak/zarada 0.

NŠ

#ZAD.1: $X=(X_t, t\geq 0)$ SP sa skupom stanja $\mathbb{R}$

a) navesti definiciju Brownovog gibanja

b) $B=(B_t, t\geq 0)$ standardno BG

$X=(X_t, t\geq 0)$, $X_t = B_{T-t} - B_T$, $T>0$

$\hookrightarrow X_0 = B_{T-0} - B_T = 0$

$\hookrightarrow$ za $t>s$ prirasti procesa X su

$$X_t - X_s = (B_{T-t} - B_T) - (B_{T-s} - B_T) =$$
$$= B_{T-t} - B_{T-s}$$

dakle izraženi su preko prirasta standardnog Brownovog gibanja, što znači da su stacionarni i nezavisni.

$\hookrightarrow X_t - X_s \overset{d}{=} B_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ (*)

$\hookrightarrow$ g.s. neprekidnost trajektorija je naslijeđena od BG $(B_t, t\geq 0)$.

$$(*)\ X_t - X_s = \underbrace{(B_{T-t} - B_T)}_{\substack{\text{PRIRAST BG } B \\ \text{NA INTERVALU} \\ \text{DULJINE } t \\ \sim \mathcal{N}(0,t)}} - \underbrace{(B_{T-s} - B_T)}_{\substack{\text{PRIRAST BG } B \\ \text{NA INTERVALU} \\ \text{DULJINE } s \\ \sim \mathcal{N}(0,s)}} \overset{d}{=} \underbrace{B_{t-s}}_{\sim \mathcal{N}(0, t-s)}$$

$t>s$, BSO

$(X_t \overset{d}{=} B_t;\ X_s \overset{d}{=} B_s)$

c) $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min\{t,s\}$

B nije ni slabo ni jako stacionaran SP.

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = E[X_t X_s] - \underbrace{E[X_t]E[X_s]}_{=0} = E[X_t X_s] =$$

$=0$, jer je
$E[X_t] = E[B_{T-t} - B_T] = E[B_{T-t}] - E[B_T] = 0$
i analogno $E[X_s] = 0$

$$= E\left[(B_{T-t} - B_T)(B_{T-s} - B_T)\right] =$$

$$= E\left[B_{T-t}B_{T-s} - B_{T-t}B_T - B_T B_{T-s} + B_T^2\right] =$$

$$= E[B_{T-t}B_{T-s}] - E[B_T B_{T-t}] - E[B_T B_{T-s}] + E[B_T^2] =$$

$$= \mathrm{Cov}(B_{T-t}, B_{T-s}) - \mathrm{Cov}(B_T, B_{T-t}) - \mathrm{Cov}(B_T, B_{T-s}) + \mathrm{Var}(B_T) =$$

$$= \min(T-t, T-s) - \min(T, T-t) - \min(T, T-s) + T =$$

$$= \min(T-t, T-s) - (T-t) - (T-s) + T =$$

$$= \min(T-t, T-s) - T + t - \cancel{T} + s + \cancel{T} =$$

$$= \min(T-t, T-s) + t + s - T =$$

$$= \begin{cases} \cancel{T} - \cancel{t} + \cancel{t} + s - \cancel{T}, & t \geq s \\ \cancel{T} - \cancel{s} + t + \cancel{s} - \cancel{T}, & t < s \end{cases} = \begin{cases} s, & s \leq t \\ t, & t < s \end{cases} = \min(t, s)$$

↳ proces X nije slabo, niti jako stacionaran, jer je BG.

ZAD 2:

N_t – BROJ IGRAČA U KOCKARNICI KOJA RADI NON-STOP

$(N_t, t \geq 0)$ – POISSONOV PROCES

a) $(N_t, t \geq 0)$ – HOMOGENI POISSONOV PROCES S INTENZITETOM $\lambda = 50$

– $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$

– zanima nas kolika je vjerojatnost da se u kockarnici između 10 i 11 sati te između 22 i 23 sata nalazi jednak broj igrača.

– $N_{11} - N_{10}$ – modelira broj igrača u kockarnici između 10 i 11 sati

– $N_{11} - N_{10} \stackrel{d}{=} N_1 \sim \mathcal{P}(50)$ zbog stacionarnosti prirasta

– $N_{23} - N_{22}$ – modelira broj igrača u kockarnici između 22 i 23 sata

– $N_{23} - N_{22} \stackrel{d}{=} N_1 \sim \mathcal{P}(50)$

– kako je $N_{23} - N_{22} \stackrel{d}{=} N_1 \stackrel{d}{=} N_{11} - N_{10}$, slijedi da je

$$P(N_{23} - N_{22} = N_{11} - N_{10}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{23} - N_{22} = N_{11} - N_{10} \mid N_{11} - N_{10} = k) P(N_{11} - N_{10} = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(\underbrace{N_{23} - N_{22}}_{\text{nezavisne}} = k \mid \underbrace{N_{11} - N_{10}} = k) P(N_{11} - N_{10} = k) =$$

$$\stackrel{\text{nez. prir.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{23} - N_{22} = k) P(N_{11} - N_{10} = k) =$$

$$\stackrel{\text{stac. prir.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(N_1 = k) P(N_1 = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (P(N_1 = k))^2 =$$

$$= e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

b) – X – slučajna varijabla koja se realizira s 0 ako igrač nije varalica i s 1 ako je igrač varalica

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

– $N^{(1)} = (N_t^{(1)}, t \geq 0)$

$N_t^{(1)}$ – broj varalica u kockarnici u trenutku t

$N_t^{(1)} \sim \mathcal{P}(\frac{50}{10} t)$, tj. $N_t^{(1)} \sim \mathcal{P}(5t)$, $\lambda_1 = 5$

– $N^{(2)} = (N_t^{(2)}, t \geq 0)$

$N_t^{(2)}$ – broj poštenih igrača u kockarnici u trenutku t

$N_t^{(2)} \sim \mathcal{P}(45t)$

– zanima nas vjerojatnost da se u jednom satu u kockarnici nađe barem dvije varalice:

↳ $N_t^{(1)} - N_{t-1}^{(1)}$ – modelira broj varalica u kockarnici u vremenskom periodu od jednog sata

↳ $P(N_t^{(1)} - N_{t-1}^{(1)} \geq 2) \overset{\text{stac. prir.}}{=} P(N_1^{(1)} \geq 2) =$

$= 1 - P(N_1^{(1)} < 2) = 1 - P(N_1^{(1)} = 0) - P(N_1^{(1)} = 1) =$

$= 1 - e^{-\lambda_1} - e^{-\lambda_1} \cdot \lambda_1 = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} =$

$= \underline{\underline{1 - 6e^{-5}}}$

ILI

$$P(N_t^{(1)} - N_{t-1}^{(1)} \geq 2) = P(N_1^{(1)} \geq 2) = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1)^k}{k!}$$

– $P(N_1^{(1)} = N_1^{(2)}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_1^{(1)} = N_1^{(2)} \mid N_1^{(2)} = k) P(N_1^{(2)} = k) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_1^{(1)} = k \mid N_1^{(2)} = k) P(N_1^{(2)} = k) =$

$\overset{\text{nez}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(N_1^{(1)} = k) P(N_1^{(2)} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-5} \cdot \frac{5^k}{k!} \cdot e^{-45} \cdot \frac{45^k}{k!} \right)$

c) - zanima nas očekivano vrijeme između ulaska prve natalice i dvadesetog poštenog igrača.

- $X_1^{(1)}$ – sl. var. koja modelira vrijeme do ulaska prve natalice
  - $X_1^{(1)} \sim \mathcal{E}(5)$
- $S_{20}^{(2)} = \sum_{k=1}^{20} X_k^{(2)}$, gdje su $X_k^{(2)}$ vremena međudolazaka za PP koji broji poštene igrače, pa je $\forall k$ $X_k^{(2)} \sim \mathcal{E}(45)$, a $S_{20}^{(2)} \sim \Gamma(\underset{n}{20}, \underset{\lambda_2}{45})$
- $S_{20}^{(2)} - X_1^{(1)}$ – slučajna varijabla koja modelira vrijeme između ulaska 1. natalice i 20. poštenog igrača
- $E[S_{20}^{(2)} - X_1^{(1)}] = E[S_{20}^{(2)}] - E[X_1^{(1)}] =$

$$= \frac{20}{45} - \frac{1}{5} = \frac{20-9}{45} = \frac{11}{45}$$

d) - $\tilde{N}^{(1)} = (\tilde{N}_t^{(1)}, t \geq 0)$, $\tilde{N}_t^{(1)} \sim \mathcal{P}(25t)$ → jer su vj. da je igrač M i da je igrač Ž jednake
↳ broj žena zaključno s trenutkom t

$Z_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ – dobitak k-te žene u kockarnici

- $\tilde{N}^{(2)} = (\tilde{N}_t^{(2)}, t \geq 0)$, $\tilde{N}_t^{(2)} \sim \mathcal{P}(25t)$
↳ broj muškaraca u kockarnici zaključno s trenutkom t

$M_k \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ – dobitak k-tog muškarca u kockarnici

- zanima nas ukupni očekivani dobitak u kockarnici u sat vremena

↳ $\sum_{k=1}^{\tilde{N}_t^{(1)}} Z_k$ – ukupni dobitak žena u kockarnici u trenutku t

3

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{\tilde{N}_t^{(2)}} M_k$ – ukupni dobitak muškaraca u kockarnici u trenutku t

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{\tilde{N}_1^{(1)}} Z_k + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_1^{(2)}} M_k$ – ukupan dobitak u kockarnici u periodu od sat vremena

$\hookrightarrow$ slijedi:

$$E\left[\sum_{k=1}^{\tilde{N}_1^{(1)}} Z_k + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_1^{(2)}} M_k\right] = E\left[\sum_{k=1}^{\tilde{N}_1^{(1)}} Z_k\right] + E\left[\sum_{k=1}^{\tilde{N}_1^{(2)}} M_k\right] =$$

$$= E\left[\tilde{N}_1^{(1)}\right] E\left[Z_k\right] + E\left[\tilde{N}_1^{(2)}\right] E\left[M_k\right] =$$

$$= 25 \cdot \underbrace{\left(0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\right)}_{1} + 25 \underbrace{\left(-1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)}_{=0} =$$

$$= 25$$

e) Realniji model za broj igrača u kockarnici bio bi NEHOMOGENI POISSONOV PROCES s prikladno definiranom funkcijom intenziteta $\lambda(t)$. Za definiciju nehomogenog PP pogledati predavanja.

2. 05. 2022. 16:57

ZAD. 3:

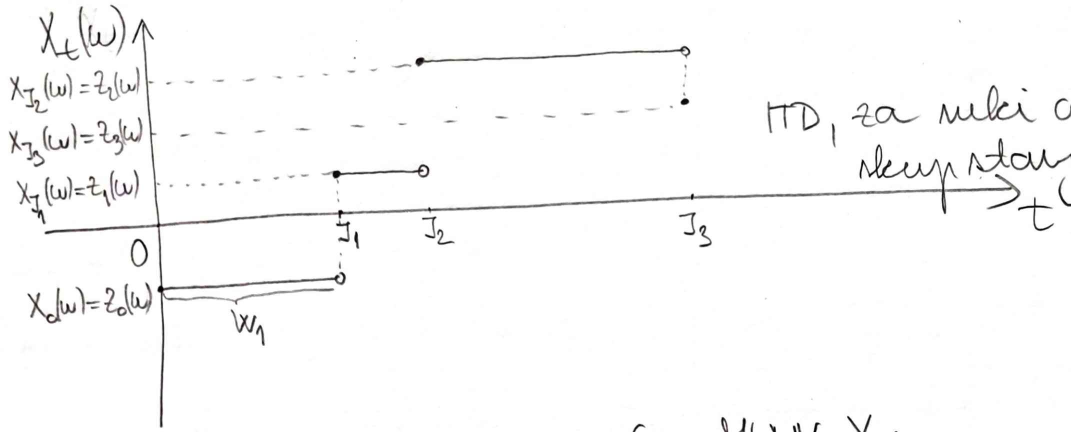
- $X=(X_t, t\geq 0)$ MLNV sa skupom stanja $S=\{-1,0,1,2\}$ modelira stanja trading-robota:
  - -1 – robot je na gubitku
  - 0 – robot je „na nuli"
  - 1 – robot zarađuje
  - 2 – robot je van funkcije.

a) $X=(X_t, t\geq 0)$ MLNV

$Z=(Z_n, n\in \mathbb{N}_0)$ – MLDV, lanac skokova MLNV

$J=(J_n, n\in \mathbb{N})$ – niz vremena skokova MLNV

$W=(W_n, n\in \mathbb{N})$ – niz vremena zadržavanja/čekanja MLNV



ITD, za neki općeniti skup stanja S.

b) - generatorska matrica Q MLNV X:

$$Q=\begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

, jer je prema zadatku

$$q(i)=\begin{cases} 0, & i\in\{-1,2\} \\ 1, & i=0 \\ 3, & i=1 \end{cases}$$

- matrica 1-koračnih prijelaznih vj. lanca skokova:

$$\Pi=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, jer je

$$\pi_{ii}=\begin{cases} 0, & q(i)\neq 0 \\ 1, & q(i)=0 \end{cases}$$

$$\pi_{ij}=\begin{cases} q_{ij}/q(i), & i\neq j \,\&\, q(i)\neq 0 \\ 0, & i\neq j \,\&\, q(i)=0 \end{cases}$$

c) zanima nas vjerojatnost da robot koji je na nuli (0) postane nefunkcionalan nakon jednog dana igranja, tj. $P(X_{24}=2 \mid X_0=0) = P_{02}(24) = ?$

- iz KBJ $(P'(t) = QP(t))$ slijedi:

$$P'_{02}(t) = [Q\,P(t)]_{02}$$

$$QP(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{-1-1}(t) & P_{-10}(t) & P_{-11}(t) & P_{-12}(t) \\ P_{0-1}(t) & P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) \\ P_{1-1}(t) & P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{2-1}(t) & P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $P'_{02}(t) = \underbrace{P_{-12}(t)}_{=0} - P_{02}(t)$

$$P'_{02}(t) = -P_{02}(t) \quad \Big| : P_{02}(t)$$

$$\frac{P'_{02}(t)}{P_{02}(t)} = -1$$

$$\left(\ln(P_{02}(t))\right)' = -1$$

$$\ln(P_{02}(t)) = -t + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ konstanta}$$

$$P_{02}(t) = e^{-t+c} = e^c e^{-t} = \tilde{c} \cdot e^{t}$$

$\hookrightarrow$ kako je $P_{02}(0) = 0$, slijedi da je $\tilde{c} = 0$, pa je $P_{02}(t) = 0$ za $\forall t \geq 0 \rightarrow$

$\rightarrow P_{02}(24) = 0$, što se može zaključiti i iz promatranja matrice Q.

d) zanima nas vjerojatnost da robot koji zaradtuje nastavi zaradtivati sljedećih 10 dana:

$P(W_1 > 240 \mid X_0 = 1) = ?$, gdje je

$W_1 \sim \mathcal{E}(q(1))$ uvjetno na $\{X_0 = 1\}$, tj.

$W_1|_{\{X_0=1\}} \sim \mathcal{E}(q(1))$, $q(1) = 3$.

$\hookrightarrow P(W_1 > 240 \mid X_0 = 1) = e^{-3 \cdot 240} = e^{-720}$

e) zanima nas vjerojatnost da brže dođe do promjene stanja za robota koji inicijalno zaradtuje, nego za robota koji je inicijalno "na nuli":

$P\left(W_1|_{\{X_0=1\}} < W_1|_{\{X_0=0\}}\right) =$

$= P\left(\underbrace{W_1|_{\{X_0=0\}}}_{\sim \mathcal{E}(q(0)),\ q(0)=1} > \underbrace{W_1|_{\{X_0=1\}}}_{\sim \mathcal{E}(q(1)),\ q(1)=3}\right) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$