Upute

Vijeme pisanja kolokvija je 120 minuta. Na kolokviju je moguće ostvariti najviše 50 bodova.

Zadatak 1. (3+5+2+5+10=25 bodova)
Algoritam kojim trading roboti automatizirano trguju na burzi temelji se na Markovljevom lancu (ML) u neprekidnom vremenu $X = (X_t, t \geq 0)$ sa skupom stanja $S = \{-1, 0, 1, 2\}$, pri čemu vrijeme brojimo u satima (npr. $t = 1$ označava stanje trading robota nakon jednog sata trgovanja). Stanje (-1) označava da je robot na gubitku, 0 da robot ne gubi i ne zarađuje ništa (gubitak/zarada je 0), 1 da robot zarađuje, a 2 da je robot van funkcije. Testiranjem je utvrđeno da je algoritam robota loš:

- ako uđe u stanje gubitka, robot nastavlja trgovati s gubitkom
- ako je gubitak/zarada 0, brzina napuštanja tog stanja i brzina prijelaza u stanje gubitka su 1
- ako robot zarađuje, brzina napuštanja tog stanja je 3, a brzine prijelaza u stanje gubitka, stanje u kojem je gubitak/zarada 0 i stanje nefunkcionalnosti su 1
- jednom kad robot postane nefunkcionalan, takav i ostaje.

Rješavanjem sljedećih zadataka opišite neke vjerojatnosne karakteristike funkcioniranja ovog trading robota.

(a) Objasnite dekompoziciju skupa stanja na klase komuniciranja te definirajte povratno i prolazno stanje ML u neprekidnom vremenu.

(b) Odredite klase komuniciranja za ML koji opisuje dinamiku trading robota, odredite očekivano vrijeme do njegove apsorpcije u jednom od apsorbirajućih stanja te vjerojatnost apsorpcije u stanju gubitka.

(c) Analizirajte i interpretirajte povratnost i prolaznost stanja ML koji opisuje dinamiku trading robota.

(d) Definirajte invarijantnu mjeru i stacionarnu distribuciju te ih odredite za ML koji opisuje dinamiku trading robota. Diskutirajte jedinstvenost dobivenog rezultata.

(e) Vlasnik trading robota osmislio je način kako da unaprijedi njegov rad. Skup stanja uspio je svesti na tročlani skup $\{-1, 0, 1\}$, tj. robot nikad neće biti van funkcije, a matrica prijelaznih vjerojatnosti lanca skokova vezanog za "poboljšanog" trading robota je

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu su vremena zadržavanja u stanjima eksponencijalno distribuirana s očekivanjima $2, 4, 4$, redom. Osim toga, osmislio je i strategiju pomoću koje može utjecati na gubitak/zaradu:

- ako robot trguje s gubitkom, gubitak se anulira
- ako robot ne gubi i ne zarađuje ništa, zarada/gubitak je 0 kuna
- ako robot trguje s dobitkom, dobitak je uvijek 100 kuna.

Odredite asimptotski očekivani dobitak kojeg generira poboljšani trading robot.

Zadatak 2. (3+12=15 bodova)

(a) Definirajte difuziju te zapišite i interpretirajte dinamiku difuzije zadane stohastičkom diferencijalnom jednadžbom (SDJ) s infinitezimalnim parametrima $\mu(t, x)$ i $\sigma(t, x)$.

(b) Argumentirajte egzistenciju i jedinstvenost jakog rješenja te pomoću odgovarajuće Itôve formule riješite sljedeću SDJ:

$$dN_t = \alpha N_t \log\left(\frac{M}{N_t}\right) dt + \sigma N_t dB_t, \quad \alpha > 0, \quad M > 0.$$

Zadatak 3. (10 bodova)
Konstruirajte SDJ čije je slabo rješenje difuzija sa stacionarnom distribucijom s funkcijom gustoće

$$f(x) = \frac{x}{2} \cdot \mathrm{I}_{[0,2]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Objasnite dinamiku difuzije zadane ovom SDJ te odredite očekivanu vrijednost difuzije u trenutku $t = 20$, ako difuzija u trenutku $t = 10$ ima vrijednost 1.

NŠ

ZADATAK 1:

• Iz rješenja prethodnog kolokvija znamo:

$$Q = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

generatorska matrica MC $X=(X_t, t\geq 0)$, $S=\{-1,0,1,2\}$

$$q(i) = \begin{cases} 0, & i\in\{-1,2\} \\ 1, & i=0 \\ 3, & i=1 \end{cases}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrica 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti lanca skokova $Z=(Z_n, n\in\mathbb{N}_0)$

a) PREDAVANJA!

b) • uočimo – (-1) i 2 su apsorbirajuća stanja

– $1 \longrightarrow 0$

$0 \not\longrightarrow 1$

– klase komuniciranja:

$C_{-1}=\{-1\}$, $C_0=\{0\}$, $C_1=\{1\}$, $C_2=\{2\}$

↳ lanac nije ireducibilan!

• očekivano vrijeme do apsorpcije MC X ili u stanju (-1) ili u stanju 2:

↳ $B=\{-1,2\}$

↳ $\tau_B = \inf\{t\geq 0 : X_t\in B\}$

↳ $g_i^B = E[\tau_B \mid X_0=i] = E_i[\tau_B]$, $i\in S$

- uočimo: $g_{-1}^B = E[\tau_B \mid X_0 = -1] = 0$

$g_2^B = E[\tau_B \mid X_0 = 2] = 0$

$g_0^B, g_1^B = ?$

$\hookrightarrow i = 0 \ldots \quad -(q_{0(-1)} \underbrace{g_{-1}^B}_{=0} + q_{00} g_0^B + q_{01} g_1^B + q_{02} \underbrace{g_2^B}_{=0}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(-1 \cdot g_0^B) = 1 \Rightarrow g_0^B = 1$

$\hookrightarrow i = 1 \ldots \quad -(\underbrace{g_{-1}^B}_{=0} + \underbrace{g_0^B}_{=1} - 3 g_1^B + \underbrace{g_2^B}_{=0}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 g_1^B = 2 \Rightarrow g_1^B = \frac{2}{3}$

- očekivana vremena do apsorpcije ML X u B uz uvjet $\{X_0 = i\}$, $i \in S$:

$$g^B = (g_{-1}^B, g_0^B, g_1^B, g_2^B) = (0, 1, \tfrac{2}{3}, 0)$$

- kolika je vjerojatnost apsorpcije ML X u stanju gubitka, tj. u stanju (-1)?
- uočimo: $h_i^{(-1)} = P(J_{-1} < J_2 \mid X_0 = i) = P(J_{-1} < \infty \mid X_0 = i)$

$h_{-1}^{(-1)} = 1$

$h_2^{(-1)} = 0$

$h_0^{(-1)}, h_1^{(-1)} = ?$

$\hookrightarrow i = 0 \ldots \quad h_{-1}^{(-1)} - h_0^{(-1)} = 0 \Rightarrow h_0^{(-1)} = h_{-1}^{(-1)} \Rightarrow h_0^{(-1)} = 1$

$\hookrightarrow i = 1 \ldots \quad \underbrace{h_{-1}^{(-1)}}_{=1} + \underbrace{h_0^{(-1)}}_{=1} - 3 h_1^{(-1)} + \underbrace{h_2^{(-1)}}_{=0} = 0 \Rightarrow 3 h_1^{(-1)} = 2 \mid : 3$

$\Rightarrow h_1^{(-1)} = \frac{2}{3}$

- $h^{(-1)} = (h_{-1}^{(-1)}, h_0^{(-1)}, h_1^{(-1)}, h_2^{(-1)}) = (1, 1, \tfrac{2}{3}, 0)$

c) • (−1) i 2 su apsorbirajuća stanja − POVRATNA SU!

• ispitajemo povratnost / prolaznost stanja $\underbrace{0 \text{ i } 1}_{q(0),\, q(1)>0}$:

$$\hookrightarrow \int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \frac{1}{q(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{ii}^{(n)} = ?$$ $\Rightarrow$ PROLAZNA SU!

• treba nam Π^n:

$$\Pi^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Pi^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Pi^n = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \forall n \in \{2, 3, \ldots\}$$

• $i = 0 \ldots$ $$\int_0^\infty P_{00}(t)\,dt = \frac{1}{q(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{00}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 < \infty$$

• $i = 1 \ldots$ $$\int_0^\infty P_{11}(t)\,dt = \frac{1}{q(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{11}^{(n)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 < \infty$$

d) invarijantna mjera ML X – rješenje sustava linearnih jednadžbi $\pi Q = 0$:

• $$\begin{bmatrix} \pi_{-1} & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 + \pi_1 \\ \pi_1 - \pi_0 \\ -3\pi_1 \\ \pi_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi_1 = 0$ $\Rightarrow$

$\pi_0 + \pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_0 = 0$

$\Rightarrow \pi = (\pi_{-1}, 0, 0, \pi_2)$ je $\forall \pi_{-1}, \pi_2 > 0$ invarijantna mjera ML X

• $\pi = (1-\pi_2, 0, 0, \pi_2)$ je $\forall \pi_2 \in [0,1]$ stacionarna distribucija ML X (dakle, ovaj ML ima neprebrojivo mnogo stacionarnih distribucija)

e) $S = \{-1, 0, 1\}$; $\quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – ireducibilan je!

• vremena zadržavanja u stanjima su:

$i = -1 \ldots \mathcal{E}(2)$

$i = 0 \ldots \mathcal{E}(4)$

$i = 1 \ldots \mathcal{E}(4)$

• primjenjujemo ergodski teorem na funkciju

$$f(j) = \begin{cases} 0, & j \in \{-1, 0\} \\ 100, & j = 1. \end{cases}$$

• asimptotski (dugoročni) dobitak poboljšanog trading-robota je:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds = \pi(f) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j,$$ gdje je

$\pi = (\pi_j, j\in S)$ stacionarna distribucija ML X sa skupom stanja $S=\{-1,0,1\}$ i pripadnim lancem skokova s matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti Π.

• $\pi = (\pi_{-1}, \pi_0, \pi_1) = ?$

↳ generatorska matrica lanca X:

$$Q = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

↳ rješavamo sustav jednadžbi $\pi Q = 0$:

I. $-\frac{1}{2}\pi_{-1} + \frac{1}{20}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 = 0$

II. $\frac{1}{10}\pi_{-1} - \frac{1}{4}\pi_0 = 0 \longrightarrow \pi_0 = \frac{4}{10}\pi_{-1}$

III. $\frac{4}{10}\pi_{-1} + \frac{1}{5}\pi_0 - \frac{1}{4}\pi_1 = 0$

↳ I. $-\frac{12}{25}\pi_{-1} + \frac{1}{4}\pi_1 = 0$

III. $\frac{12}{25}\pi_{-1} - \frac{1}{4}\pi_1 = 0$

$\Big\} \sum = 0$

• fiksiramo $\pi_0 > 0 \Rightarrow$ • $\pi_{-1} = \frac{10}{4}\pi_0$

• $-\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{4}\pi_0 + \frac{1}{20}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{24}{5}\pi_0$

• $\pi = \left(\frac{10}{4}\pi_0, \pi_0, \frac{24}{5}\pi_0\right)$ je $\forall \pi_0 > 0$ inv. mjera ML X

- da bismo dobili stacionarnu distribuciju ML X, normiramo inv. mjeru π:

$$1 = \frac{10}{4}\pi_0 + \pi_0 + \frac{24}{5}\pi_0 = \frac{50+20+96}{20}\pi_0 = \frac{166}{20}\pi_0 = \frac{83}{10}\pi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{10}{83} \Rightarrow \pi = \Big(\underbrace{\tfrac{50}{166}}_{\pi_{-1}}, \underbrace{\tfrac{10}{83}}_{\pi_0}, \underbrace{\tfrac{48}{83}}_{\pi_1}\Big) \text{ je jedinstvena}$$

stacionarna distribucija ML X

- slijedi da je dugoročni dobitak (očekivani) poboljšanog trading robota

$$\sum_{j\in S} f(j)\pi_j = \overbrace{f(-1)}^{=0}\pi_{-1} + \overbrace{f(0)}^{=0}\pi_0 + f(1)\pi_1 = f(1)\pi_1$$

$$= \frac{48}{83}\cdot 100 = \frac{4800}{83} \approx 57.83 \text{ kn}$$

#ZADATAK 2:

a) PREDAVANJA!

b) ZADATAK 61 + ZADATAK 67 S NASTAVE!

#ZADATAK 3: $f(x) = \frac{x}{2} I_{[0,2]}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x\in[0,2] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

- $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}(2^3-0) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\hookrightarrow$ drift parametar (infinitezimalno očekivanje):

$$\mu(x) = -\theta\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

- parametar difuzije (infinitezimalna varijanca) za $x\in[0,2]$:

$$\sigma^2(x) = \frac{2\theta}{f(x)}\int_0^x (\mu-y)f(y)\,dy = \frac{4\theta}{x}\int_0^x \left(\frac{4}{3}-y\right)\frac{y}{2}\,dy =$$

$$= \frac{4\theta}{x}\left(\frac{2}{3}\int_0^x y\,dy - \frac{1}{2}\int_0^x y^2\,dy\right) = \frac{4\theta}{x}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}y^2\Big|_0^x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_0^x\right) =$$

$$= \frac{4\theta}{x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\theta}{\cancel{x}}\cdot\frac{1}{\underset{3}{\cancel{6}}}x^{\cancel{2}}\left(2 - x\right) = \frac{2\theta}{3}x(2-x)$$

- SDJ koja opisuje dinamiku difuzije $X=(X_t, t\geq 0)$ sa stacionarnom distribucijom $f(x)=\frac{x}{2}I_{[0,2]}(x)$ je

$$dX_t = -\theta\left(x-\frac{4}{3}\right)dt + \sqrt{\frac{2\theta}{3}x(2-x)}\,dB_t, \quad \theta>0.$$

- uvjetno očekivanje:

$$E[X_{20} \mid X_{\overset{s}{10}} = 1] = e^{-10\theta} + \frac{4}{3}\left(1-e^{-10\theta}\right)$$

$\hookrightarrow s+t = 10+t \Rightarrow t=10$