Prvi kolokvij iz Slučajnih procesa

Zadatak 1: [2 boda + 6 bodova]
Definirajte jednostavni proces grananja te pretpostavite da slučajna varijabla X_1 ima geometrijsku distribuciju s parametrom $p = 1/2$. Izračunajte vjerojatnosti izumiranja takve populacije?

Zadatak 2: [3 boda + 2 boda + 4 boda + 4 boda]
Definirajte Poissonov proces, proces međudolaznih vremena te proces dolaznih vremena (tj. vremena čekanja) Poissonovog procesa. Pretpostavite da nekom osiguranju zahtjevi za isplatu šteta po policama osiguranja od automobilske odgovornosti stižu po Poissonovom procesu s intentitetom dvadeset polica za radnog vremena od 8:00 do 16:00 sati.

a) Odredite vjerojatnost da između pristizanja dviju uzastopnih polica prođe između pola sata i sat vremena.
b) Neke police koje pristižu na naplatu su osnovane i po njima se vlasniku police isplaćuje šteta, a neke su neosnovane i osiguranje po njima ne isplaćuje zatraženi iznos štete. Pretpostavimo da su tri petine zahtjeva za isplatu štete osnovani, a dvije petine neosnovani zahtjevi. Definirajte procese koji broje osnovane i neosnovane zahtjeve te izračunajte očekivani broj neosnovanih zahtjeva i vjerojatnost da tijekom jednog dana osiguranje primi više od dva takva zahtjeva.
c) Pretpostavimo da je intezitet pristizanja neosnovanih zahtjeva za isplatu štete promjenjiv u vremenu i da za radnog vremena linearno raste od jednog do osam zahtjeva. Izračunajte očekivani broj pristiglih neosnovanih zahtjeva između 14:00 i 16:00 sati te vjerojatnost da u istom vremenskom intervalu osiguranje primi više od dva takva zahtjeva.

Zadatak 3: [3 boda + 3 boda]

a) Definirajte Brownovo gibanje i odredite njegovu funkciju autokovarijanci. Je li ono u nekom smislu stacionaran proces? Obrazložite svoje odgovore.
b) Pomoću Brownovog gibanja definirajte slučajni proces koji je stacionaran u užem ili u širem smislu te argumentirajte zašto je to tako.

Zadatak 4: [3 boda + 8 bodova]

a) Definirajte uvjetno očekivanje slučajne varijable X u odnosu na sigma algebru $\mathcal{F}$ te navedite barem dva njegova svojstva.
b) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor takav da je $\Omega = [-1, 1]$, $\mathcal{F}$ Borelova σ-algebra na $[-1, 1]$ i P normirana Lebesgueova mjera na $\mathcal{F}$. Neka je $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definirana izrazom
$$Y(\omega) = \begin{cases} -1 & , \quad -1 \le \omega < -\varepsilon \\ 0 & , \quad -\varepsilon \le \omega \le \varepsilon \\ 1 & , \quad \varepsilon < \omega \le 1 \end{cases} \quad , \quad \varepsilon \in \langle 0, 1\rangle,$$
te neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definirana izrazom $X(\omega) = \omega$. Odredite uvjetno očekivanje $E[X|\sigma(Y)]$.

Zadatak 5: [4 boda + 8 bodova]

a) Definirajte martingal, submartingal i supermartingal te pokažite da je slučajni proces martingal ako i samo ako je i submartingal i supermartingal.
b) Neka je početni imetak kockara X_0 kuna te neka u svakoj partiji igre na sreću on može osvojiti jednu kunu s vjerojatnošću $1/4$ ili izgubiti jednu kunu s vjerojatnošću $3/4$. Definirajte slučajni proces kojim opisujemo kockarev imetak. Pokažite da je taj proces supermartingal u odnosu na filtraciju generiranu slučajnim varijablama kojima opisujemo promjenu kockareva imetka nakon uzastopnih partija igre na sreću.

NŠ