

Drugi kolokvij iz Slučajnih procesaZadatak 1: [2 boda + 8 bodova]

- a) Definirajte predvidiv proces  $H = (H_n, n \in \mathbb{N})$  i martingalnu transformaciju martingala  $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$  predvidivim procesom  $H$ .
- b) Kockarnica organizira pravednu igru, tako što se nezavisno baca simetričan novčić i nudi dupli iznos od uloženog za pogođenu stranu. Beskonačan niz kockara se kladi na sljedeći način. Prije svakog bacanja u prostoriju ulazi jedan kockar i ulaže 1 kn na pismo (P). Ako promaši, gubi svoju 1 kn i izlazi iz prostorije, a zatim ulazi sljedeći kockar. Ako dobije, osvaja 2 kn i u sljedećem bacanju stavlja 2 kn na glavu (G; no sada je u prostoriji još jedan kockar koji počinje s 1 kn na P). Ako promaši, gubi sve i izlazi van. Ako pogodi, osvojio je 4 kn i u idućoj igri se kladi cijelim iznosom na P. Ako dobije izlazi sa svojih 8 kn i cijela igra prestaje. Koliko će očekivano trajati igra?

Zadatak 2: [3 boda + 4 boda + 6 bodova + 6 bodova]

Pretpostavimo da se Mr. Spock sa zvjezdanog broda Enterprise može teleportirati na svoj planet Vulkan u bilo koju prostoriju svog trosobnog stana s dodatnom (četvrtom) tajnom sobom u kojoj ne postoje nikakva vrata niti prozori. Jedna mogućnost Spockovog kretanja stanom opisana je na sljedeći način:

- ako se nađe u sobi 1, soba se sama zaključa i Spock ostaje zarobljen
- ako se nađe u sobi 2, s jednakim vjerojatnostima "u jednom koraku" odlazi u sobu 1 ili ostaje u sobi 2
- ako se nađe u sobi 3, s jednakim vjerojatnostima "u jednom koraku" odlazi u sobu 2 ili ostaje u sobi 3
- ako se teleportira u sobu 4 (tajna soba), ostaje u njoj zarobljen.

Odgovorite na sljedeća pitanja i riješite sljedeće zadatke:

- a) Definirajte Markovljev lanac (ML) u diskretnom vremenu. Čime je takav ML u potpunosti određen i zašto? Obrazložite zašto ima smisla opisano Spockovo kretanje po stanu modelirati ML.
- b) Odredite i shematski prikažite skup stanja i matricu 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti ML kojim modeliramo opisano Spockovo kretanje po stanu. Je li ovaj ML ireducibilan? Obrazložite svoj odgovor.
- c) Definirajte povratno i prolazno stanje ML te klasificirajte stanja ovog ML na povratna i prolazna stanja.
- d) Ako se Spock inicijalno teleportirao u sobu 2, odredite očekivani broj njegovih prelazaka iz sobe u sobu do zarobljavanja u sobi 1 te izračunajte vjerojatnost da će se zarobljavanje u sobi 1 dogoditi.

Zadatak 3: [4 boda + 7 bodova + 10 bodova]

U šeširu  $A$  nalaze se dvije bijele, a u šeširu  $B$  tri crne kuglice. Mađioničar koji dobro zna vjerojatnost pri jednom izvodenju pokusa na slučajnan način izvlači jednu kuglicu iz šešira  $A$  i jednu kuglicu iz šešira  $B$  i zamijeni im mjesta. Slučajnom varijablom  $X_n$  modeliramo broj bijelih kuglica u šeširu  $A$ , a slučajnim varijablom  $Y_n$  broj bijelih kuglica u šeširu  $B$  nakon  $n$  opisanih premještanja,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- a) Odredite skup stanja i matricu 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti ML  $(Z_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ,  $Z_n = X_n - Y_n$ .
- b) Navedite Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe i odredite najvjerojatnije stanje ovog ML nakon četiri premještanja kuglica.
- c) Definirajte invarijantnu mjeru, stacionarnu distribuciju i graničnu distribuciju ML. Argumentirajte egzistenciju i jedinstvenost te odredite i interpretirajte graničnu distribuciju ovog ML.