PRVI KOLOKVIJ IZ VJEROJATNOSTI

Zadatak 1. [3 boda + 1 bod + 2 boda]

a) Definirajte uvjetno očekivanje $E[X|Y]$ i navedite njegova osnovna svojstva.

b) Neka je $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ n-dimenzionalan neprekidan slučajni vektor a funkcijom gustoće $f_{\mathbb{X}}$ i A regularna matrica reda n.

   1) Napišite izraz za funkciju gustoće slučajnog vektora $\mathbb{Y} = A\,\mathbb{X}$.

   2) Kako biste pomoću prethodnog rezultata odredili funkciju gustoće linearne kombinacije slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_n$?

Zadatak 2. [4 boda + 4 boda + 2 boda]

Pretpostavimo da neka populacija sadrži jednak broj jedinki s krvnim grupama A, B, AB i 0, tj. $\Omega = \{A, B, AB, 0\}$ i $P(\{A\}) = P(\{B\}) = P(\{AB\}) = P(\{0\}) = 1/4$. Iz te populacije na slučajan način biramo osam jedinki. Broj jedinki s krvnom grupom A modeliran je slučajnom varijablom X_1, broj jedinki s krvnom grupom B slučajnom varijablom X_2, broj jedinki s krvnom grupom AB slučajnom varijablom X_3, a broj jedinki s krvnom grupom 0 slučajnom varijablom X_4.

a) Odredite gustoću slučajnog vektora $\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ te gustoće njegovih marginalnih distribucija.

b) Odredite gustoću slučajnog vektora (X_1, X_2) ako je poznato da su odabrane dvije jedinke s krvnom grupom AB i jedna jedinka s krvnom grupom 0.

c) Izračunajte $P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4)$.

Zadatak 3. [4 boda + 3 boda + 3 boda]

Neka je $\mathbb{X} = (X, Y, Z)$ neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f_{\mathbb{X}}(x, y, z) = \begin{cases} k & , \quad 0 < z < y < x < \pi \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

a) Odredite vrijednost konstante k.

b) Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora (Y, Z).

c) Za zadane $Y = y$ i $Z = z$ odredite uvjetnu funkciju gustoće $f(x|y, z)$.

Zadatak 4. [12 bodova]

Slučajna varijabla X s funkcijom fustoće

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{k}{2}-1}\, \mathrm{I}_{\langle 0,\infty\rangle}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ima χ^2 distribuciju s $k \in \mathbb{N}$ stupnjeva slobode ($X \sim \chi^2(k)$). Neka su $X_1 \sim \chi^2(n)$ i $X_2 \sim \chi^2(m)$, $n, m \in \mathbb{N}$. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable

$$Z = \frac{\frac{X_1}{n}}{\frac{X_2}{m}},$$

tj. funkciju gustoće F distribucije sa stupnjevima slobode n i m ($Z \sim F(n, m)$).

Zadatak 5. [12 bodova]

Pretpostavimo da strijelac gađa metu jednostavnog karaktera (mogući ishodi su samo pogodak i promašaj). Broj odapetih strijela modeliramo binomnom slučajnom varijablom N s parametrima 6 i 0.8 ($N \sim \mathcal{B}(6, 0.8)$), a broj pogodaka mete diskretnom slučajnom varijablom X. Neka, uz dani broj n odapetih strijela, broj pogodaka mete ima binomnu distribuciju $\mathcal{B}(n, 0.3)$. Odredite matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Nenad Šuvak